Colecția "LICEU”

CULEGERE DE PROBLEME

pentru examenul de admitere la Facultatea de Automatică şi Calculatoare, Facultatea de Electronică şi Telecomunicații, Facultatea de Arhitectură

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” (Timişoara)
Culegere de probleme pentru examenul de admitere la: Facultatea de Automatică şi Calculatoare, Facultatea de Electronică şi Telecomunicații, Facultatea de Arhitectură/Universitatea “Politehnica” din Timişoara. Departamentul de Matematică - Timişoara : Editura Politehnica, 2010
Bibliogr.
ISBN 978-606-554-236-5

51(076)(079.1)

UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN TIMIŞOARA

DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ

CULEGERE DE PROBLEME

pentru examenul de admitere la Facultatea de Automatică şi Calculatoare, Facultatea de Electronică şi Telecomunicații, Facultatea de Arhitectură

Colecția "LICEU"

EDITURA POLITEHNICA
TIMIŞOARA - 2013

EDITURA POLITEHNICA
Bd. Republicii nr. 9
300159 Timişoara, România

Tel. 0256/403.823
Fax 0256/403.823
E-mail: editura@edipol.upt.ro

Consilier editorial: Prof.dr.ing. Sabin IONEL
Redactor: Claudia MIHALI

Bun de imprimat: 10.12.2010
Coli de tipar: 7
C.Z.U. 51(076)(079.1)
ISBN 978-606-554-236-5

Tiparul executat la S.C. URC XEDOS Timişoara

CUPRINS

PREFAȚĂ

Prezenta culegere conține probleme de matematică pentru pregătirea candidaților la admiterea în Facultatea de Automatică şi Calculatoare, Facultatea de Electronică şi Telecomunicații şi Facultatea de Arhitectură din cadrul Universității „Politehnica" din Timişoara.

Problemele sunt prezentate după modelul „test", cu mai multe răspunsuri, dintre care unul singur este corect.

În finalul culegerii sunt prezentate subiectele, cu soluții complete, date la admitere în ultimii doi ani la facultățile menționate.

Notăm că această culegere este alcătuită din o parte dintre problemele din cartea „Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat şi admiterea în învățământul superior", Editura Politehnica, 2010, elaborată de autorii: T. Bânzaru, N. Boja, O. Lipovan, A. Kovacs, G. Babescu, P. Găvruța, D. Rendi, I. Mihuț, D. Dăianu, D. Păunescu, C. Milici şi R. Anghelescu.

La concursul de admitere, pentru note până la 8,00, subiectele se extrag exclusiv din această culegere (cu eventuale modificări minore), restul subiectelor provenind din cartea menționată mai sus.

Departamentul de Matematică
al
Universității „Politehnica" din Timişoara

DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ

PROGRAMA ANALITICĂ

Elemente de algebră

Progresii aritmetice şi geometrice. Funcţii: funcţia parte întreagă, funcţia radical, funcţia de gradul al doilea; Ecuaţii iraţionale. Sisteme de ecuaţii neliniare. Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică. Ecuaţii exponenţiale şi ecuaţii logaritmice. Permutări, aranjamente, combinări. Binomul lui Newton. Numere complexe sub formă algebrică. Matrice. Determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare. Legi de compoziţie. Grupuri. Inele şi corpuri. Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ.

Elemente de geometrie şi trigonometrie

Funcţii trigonometrice. Relaţii între funcţii trigonometrice. Aplicaţii trigonometrice în geometria plană: teorema cosinusului, teorema sinusurilor; rezolvarea triunghiurilor. Dreapta în plan. Ecuaţii ale dreptei. Condiţii de paralelism şi condiţii de perpendicularitate a două drepte. Calcule de distanţe şi arii.

Elemente de analiză matematică

Limite de funcţii. Continuitate. Derivabilitate. Aplicaţii ale derivatelor în studiul variaţiei funcţiilor. Primitive. Integrala definită. Aplicaţii ale integralei definite: aria unei suprafeţe plane, volumul unui corp de rotaţie.

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

ELEMENTE DE ALGEBRĂ
(simbol AL)

AL - 001 Să se găsească primul termen a_1 şi raţia r ai unei progresii aritmetice

$$\left(a_n\right)_{n\geq 1} \text{ dacă : } \begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4 \end{cases}.$$

a) $a_1 = -4, r = 3$ b) $a_1 = -4, r = 4$ c) $a_1 = -3, r = 1$
d) $a_1 = -5, r = 2$ e) $a_1 = -2, r = 2$ f) $a_1 = 1, r = 1$

AL - 002 Să se determine suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), dacă $a_1=2$, $a_5=14$.

a) 10100 b) 7950 c) 15050
d) 16500 e) 50100 f) 350

AL - 003 Pentru o progresie aritmetică suma primilor n termeni ai ei este $S_n = 5n^2 + 6n$. Să se determine primul termen a_1 şi raţia r.

a) $a_1 = 11, r = 9$ b) $a_1 = 11, r = 10$ c) $a_1 = 11, r = 11$
d) $a_1 = 10, r = 11$ e) $a_1 = 10, r = 10$ f) $a_1 = 9, r = 9$

AL – 004 Fie $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ un şir având suma primilor n termeni $S_n = n^2 + an + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, pentru orice $n \geq 1$. Să se determine a şi b astfel încât şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ să fie progresie aritmetică cu primul termen egal cu 2.

a) $a = 2,\ b = 3$ b) $a \in \mathbf{R},\ b \in (1,2)$ c) $a = 1, b = 0$
d) $a = 2, b = 0$ e) $a = 2, b = 1$ f) $a = 1, b = 2$

AL - 005 Să se determine primul termen a_1 şi raţia q pentru progresia

geometrică $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ dacă : $\begin{cases} a_5 - a_1 = 15 \\ a_4 - a_2 = 6 \end{cases}$.

a) $a_1 = 0, q = 1$ b) $a_1 = 1, q = 2$ c) $a_1 = -16, q = \frac{1}{2}$

d) $\begin{cases} a_1 = -16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ e) $a_1 = 1, q = -1$ f) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 4 \end{cases}$

AL - 006 Suma a trei numere în progresie aritmetică este egală cu 12. Dacă se adaugă acestora, respectiv numerele 1, 2, 11, progresia devine geometrică . Să se afle aceste numere.

a) 5,4,7 şi 15,14,13 b) 1,4,7 şi 17,4,-9 c) 6,8,10
d) 1,3,5 şi 17,15,13 e) 5,9,13 şi 18,14,10 f) 2,4,6 şi –1,4,9

AL – 007 Să se calculeze expresia

$$E = \frac{1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}}{1 + a^2 + a^4 + ... + a^{2n-2}},\ a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}.$$

a) $\frac{1}{a}$ b) $\frac{a^n + 1}{a - 1}$ c) $\frac{a + 1}{a^n + 1}$

d) $\frac{a}{a^n + 1}$ e) $\frac{a^n + 1}{a^{2n} + 1}$ f) 1

AL – 008 Să se determine numerele reale *x,y,z* dacă *x,y,z* sunt în progresie aritmetică cu rația nenulă, *x,z,y* sunt în progresie geometrică şi *x+y+z = 18.*

a) - 24, 6, 12 b) 24, 6, -12 c) 6, 12, 0
d) -12, 12, 18 e) 12, -6, 36 f) 36, -18, 0

AL - 009 Notând cu S mulțimea soluțiilor ecuației

$$\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{[x]}$$

să se precizeze care din următoarele mulțimi este S

a) $\left\{\frac{1}{\mathrm{n}}, \mathrm{n} \in \mathbf{Z}^*\right\}$ b) $\bigcup_{\mathrm{k} \in \mathbf{Z}^*} \left[\mathrm{k}, \mathrm{k} + \frac{1}{\mathrm{k}}\right]$ c) $\{\mathrm{n}^2; \mathrm{n} \in \mathbf{Z} \setminus \{-1,1\}\ \}$

d) {-1,1} e) [-1,1] f) (-1,1)

AL – 010 Se consideră funcția f: **R**→**R**, $f(x)=2\left[\frac{x}{2}\right]+1$

şi se notează $f_2=f \circ f, \ldots, f_n=f_{n-1} \circ f$.

Să se determine expresia lui f_n

a) $f_n(x)=f(x)+n$; b) $f_n(x)=2^n f(x)$; c) $f_n(x)=2^n f(x)+2^{n-1}+1$
d) $f_n(x)=f(x)$; e) $f_n(x)=f(x)+2n+1$; f) $f_n(x)=2f(x)+1$

AL - 011 Să se calculeze $f((1,4])$ pentru funcția de gradul al doilea definită prin

$$f(x)=x^2-4x+3.$$

a) $[0,3]$ b) $[-1,0)$ c) $(0,3]$ d) $[-1,3]$ e) $(-1,0)$ f) $(0,3)$

AL - 012 Să se rezolve inecuația $|x|<x^2-x$.

a) $x\in \mathbf{R}$ b) $x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$ c) $x\in(3,+\infty)$
d) $x\in(0,+\infty)\cup(-\infty,-2)$ e) $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ f) $x\in \mathbf{R}\setminus\{0,2\}$

AL - 013 Să se determine valorile parametrului real *m* astfel încât

$$\{x\in \mathbf{R} : (m-1)x^2-(m+1)x+m+1>0\}=\varnothing.$$

a) $m\in(-\infty,-1)\cup\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$ b) $m\in[1,+\infty)$ c) $m\in(-\infty,-1]$

d) $m\in\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$ e) $m\in\left[-1,\frac{5}{3}\right]$ f) $m\in(-\infty,1]$

AL - 014 Fiind dată ecuația $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$, să se exprime în funcție de a, b şi c suma

$$S_3=x_1^3+x_2^3,$$

unde x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuației date.

a) $S_3=\frac{b^3}{a^3}-3\frac{bc}{a^2}$ b) $S_3=\frac{c^3}{a^3}-3\frac{bc}{a^2}$ c) $S_3=\frac{b^2}{a^2}-3\frac{bc}{a^3}$

d) $S_3=-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{bc}{a^2}$ e) $S_3=-\frac{c^3}{a^3}+3\frac{bc}{a^2}$ f) $S_3=-\frac{b^2}{a^2}+3\frac{bc}{a^3}$

AL - 015 Să se determine parametrii reali m şi n astfel ca ecuațiile $(5m-52)x^2+(4-m)x+4=0$ şi $(2n+1)x^2-5nx+20=0$ să aibă aceleaşi rădăcini.

a) *m = -11, n = 7;* b) *m = - 7, n = 11* c) *m = 9, n = 7*
d) *m = 11, n = 7* e) *m = 7, n = 11* f) *m = 9, n = -7*

AL - 016 Să se rezolve ecuația irațională $\sqrt{1-x^2}+x=1$.

a) $x_1=0, x_2=1$ b) $x_1=-1, x_2=1$ c) $x_1=-1, x_2=0$
d) $x_1=1, x_2=2$ e) $x_1=-1, x_2=2$ f) $x_1=0, x_2=2$

AL - 017 Fie funcția de gradul al doilea $f_m(x)=mx^2-(2m-1)x+m-1$, $(m\neq 0)$. Să se determine m astfel încât vârful parabolei asociate acestei funcții să se găsească pe prima bisectoare.

a) $m=\frac{1}{4}$ b) $m=4$ c) $m=\frac{1}{2}$ d) $m=2$ e) $m=\frac{1}{6}$ f) $m=6$

AL - 018 Determinați expresia analitică a funcției de gradul al doilea $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax^2+4x+c$, ştiind că graficul ei taie axa Oy în punctul 1 şi are abscisa vârfului $-\frac{2}{3}$.

a) $f(x)=2x^2+4x+1$ b) $f(x)=3x^2+4x-1$
c) $f(x)=4x^2+4x+1$ d) $f(x)=3x^2+4x+1$
e) $f(x)=x^2+4x+1$ f) $f(x)=3x^2+4x+3$

AL - 019 Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât parabolele asociate funcțiilor $f(x)=x^2-2x-4$ şi $g(x)=mx^2-2mx-6$ să aibă acelaşi vârf.

a) m = -1 b) m = 1 c) m = -2
d) m = 2 e) m = 3 f) m = -5

AL - 020 Să se determine $p,q\in\mathbf{R}$ dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-x^2+px+q$ are maximul 4 în punctul x = -1.

a) $p=-2, q=3$ b) $p=-1, q=2$ c) $p=3, q=-2$
d) $p=q=-2$ e) $p=q=1$ f) $p=2, q=-3$

AL - 021 Presupunem că pentru ecuația $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ avem $\Delta>0$ şi rădăcinile x_1, x_2. Să se calculeze $|x_1-x_2|$ în funcție de Δ şi a.

a) $\dfrac{\Delta}{2a}$ b) $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ c) $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$
d) $\sqrt{\Delta}$ e) $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{-a}$ f) $\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

AL - 022 Pentru ce valori ale parametrului real m inegalitățile

$$-2<\frac{2x^2-mx+2}{x^2-x+1}<6 \text{ sunt satisfăcute pentru orice } x\in\mathbf{R}\,?$$

a) $m\in\mathbf{R}$ b) $m\in(-2,6)$ c) $m\in(6,+\infty)$
d) $m\in(-\infty,-2)$ e) $m\in(-6,6)$ f) $m\in[-2,6]$

AL - 023 Să se determine $\operatorname{Im} f=\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}$ pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$$

a) $\left[\dfrac{9-2\sqrt{21}}{3},\dfrac{9+2\sqrt{21}}{3}\right]$ b) $\left[\dfrac{9+2\sqrt{21}}{3},\infty\right)$

c) $\left(-\infty,\dfrac{9-2\sqrt{21}}{3}\right]$ d) $\left(-\infty,\dfrac{9-2\sqrt{21}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{9+2\sqrt{21}}{3},\infty\right)$

e) $\left(-\infty,\dfrac{9-3\sqrt{21}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{9+3\sqrt{21}}{3},\infty\right)$ f) $\left(\dfrac{9-3\sqrt{21}}{3},\dfrac{9+3\sqrt{21}}{3}\right)$

AL - 024 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$$

a) $\{(1,3),(3,1)\}$ b) $\{(2,3),(3,2)\}$ c) $\{(1,2),(2,1)\}$
d) $\{(-1,2),(2,-1)\}$ e) $\{(1,1)\}$ f) $\{(2,2)\}$

AL - 025 Să se determine soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{4}{3} \\ x+y+xy=5 \end{cases}$$

a) $\{(2,1),(1,2)\}$, b) $\{(1,1)\}$ c) $\{(2,2)\}$
d) $\{(2,3),(3,2)\}$ e) $\{(1,3),(3,1)\}$ f) $\{(2,2),(1,1)\}$

AL - 026 Să se rezolve inecuația $2+3x+\sqrt{5x+4}<0$.

a) $\left[-\frac{4}{5},-\frac{2}{3}\right)$ b) $\left[-\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right]$ c) $\left(-\frac{4}{5},-\frac{7}{9}\right)$ d) $\left[-\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right]$ e) $\left(0,\frac{7}{9}\right)$ f) $\left(-\frac{7}{9},0\right)$

AL - 027 Să se determine $x\in\mathbf{R}$ pentru care $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=1$.

a) $x\in(-\infty,0)$ b) $x=-1$ c) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $x\in\varnothing$

AL - 028 Fie inecuația $\sqrt{4-x^2}>1-x$. Care din intervalele de mai jos reprezintă mulțimea soluțiilor inecuației ?

a) $(-\infty,-3)$ b) $\left(\frac{17}{2},20\right)$ c) $(-2,2]$ d) $(22,+\infty)$ e) $[4,5)$ f) $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},2\right]$

AL - 029 Să se determine mulțimea $\mathrm{A}=\left\{x\in\mathbf{R}\;\middle|\;\sqrt{x^2-5x+6}\geq\sqrt{3-x}\right\}$.

a) $(-\infty,-1]$ b) $[2,+\infty)$ c) $[1,+\infty)$ d) $(-\infty,1]\cup\{3\}$ e) $[1,2)\cup\{3\}$ f) $[3,+\infty)$

AL - 030 Să se determine valoarea expresiei

$$E=\frac{\left(9^n-9^{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(27^{n-1}-19\cdot 27^{n-2}\right)^{\frac{1}{3}}}\quad , n\in \mathbf{Z}$$

a) $\sqrt[6]{72}$ b) $\sqrt{2}\cdot 3^{n-1}$ c) $\sqrt{2}\cdot 3$ d) $\sqrt{2}\cdot 3^{-\frac{n+3}{2}}$ e) 1 f) 2

AL - 031 Să se determine toate soluțiile reale ale ecuației

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1 .$$

a) $x\in\{2,5,10\}$ b) $x\in[5,10]$ c) $x\in\{5,10\}$ d) $x\in[1,5]$ e) $x\in(5,+\infty)$ f) $x\in(5,10)$

AL - 032 Să se determine toate soluțiile reale ale ecuației

$$\sqrt{x^2-1}+x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=0 .$$

a) $x\in\{-1,1\}$ b) $x\in\{-2,-1,1\}$ c) $x\in\varnothing$

d) $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ e) $x\in(-\infty,-1]\cup\{1\}$ f) $x\in\{-1,1,0\}$

AL - 033 Să se calculeze valoarea expresiei $\mathrm{E}=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, pentru $x\in[1,2]$.

a) $\mathrm{E}=1+x$ b) $\mathrm{E}=x^2-3x+4$ c) $\mathrm{E}=2$

d) $\mathrm{E}=3x-x^2$ e) $\mathrm{E}=\sqrt{6x-2x^2}$ f) $\mathrm{E}=2(2-x)$

AL - 034 Să se rezolve ecuația: $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x-\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=\frac{3}{2}$.

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=\frac{2\lg 2}{\lg\left(3+2\sqrt{2}\right)}$

d) $x \in \varnothing$ e) $x = \dfrac{2\lg 2}{\lg\left(3-2\sqrt{2}\right)}$ f) $x = 2\lg 2$

AL - 035 Determinați valoarea lui x pentru care $e^x + e^{-x} = 2$

a) 1 b) –1 c) 2 d) 0 e) –2 f) ln2

AL - 036 Să se rezolve ecuația $2^x - 3^x = \sqrt{6^x - 9^x}$

a) $x_1 = 0$ este unica soluție

b) $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{1-\log_2 3}$

c) $x_1 = 0$, $x_2 = \log 2$

d) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_2 3 + 1$

e) $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{\log_2 3}$

f) $x_1 = 0$, $x_2 = \log_2 3$

AL - 037 Să se rezolve inecuația: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$.

a) $(4,+\infty)$ b) $[-2,1)$ c) $(0,10)$ d) $(1,+\infty)$ e) $(2,+\infty)$ f) $(-1,1)$

AL - 038 Să se rezolve inecuația: $\dfrac{2\cdot 2^{x-1}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

a) $x \in \left(0, \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ b) $x \in \left(0, \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ c) $x \in (0,1)$

d) $x \in \left(0, \log_{\frac{2}{3}}(\sqrt{5}-1)\right)$ e) $x \in \left(0, \log_{\frac{2}{3}}(\sqrt{5}+1)\right)$ f) $x \in (-1,1)$

AL - 039 Să se rezolve ecuația: $\dfrac{\log_2(2x-5)}{\log_2\left(x^2-8\right)} = \dfrac{1}{2}$.

a) $x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = 3$ b) $x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = -3$ c) $x_1 = \frac{11}{3}$

d) $x_1 = 3$ e) $x_1 = -\frac{11}{3}, x_2 = -3$ f) $x_1 = 9$

AL - 040 Să se precizeze domeniul maxim de definiție al funcției:

$$f(x) = \sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}}\ .$$

a) $(-\infty,1) \cup \left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ b) $(-\infty,1) \cup [2,+\infty)$ c) $[2,+\infty)$

d) $(1,+\infty)$ e) $(0,2] \cup (4,\infty)$ f) $(-\infty,0] \cup [2,\infty)$

AL -041 Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției

$$f(x) = \sqrt{\log_x \sqrt{3x} \cdot \log_3 x}\ .$$

a) $(0,+\infty)$ b) $(1,+\infty)$ c) $\left(0,\frac{1}{3}\right] \cup (1,+\infty)$

d) $\left(0,\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right)$ e) $(0,1) \cup (2,+\infty)$ f) $(1,2)$

AL - 042 Mulțimea soluțiilor ecuației $\log_x 2x + \log_{2x} x = \frac{5}{2}$ este:

a) ϕ; b) $\left\{\frac{1}{2},2\right\}$; c) $\{2,4\}$; d) $\left\{\frac{1}{4},2\right\}$; e) $\{2,5\}$ f) $\left\{\frac{1}{5},2\right\}$

AL - 043 Să se rezolve ecuația: $\log_2 3 + 2\log_4 x = \left(x^{\log_9 16}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}}$.

a) $x = 3$ b) $x = 1$ c) $x = \frac{16}{3}$ d) $x = \frac{3}{16}$ e) $x = \frac{1}{3}$ f) $x = 3$

AL - 044 Să se rezolve ecuația

$$\lg x^2 + 2\lg x = 2^3 \ .$$

a) x=10 b) x=100 c) x= 1000
d) x=1 e) x=2 f) x=3

AL - 045 Se consideră inecuația: $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geq \frac{3}{4}, a > 0, a \neq 1$

şi se notează cu M_a mulțimea tuturor soluțiilor sale. Care dintre următoarele afirmații este adevărată ?

a) $M_{\frac{1}{2}} = \left(0, \frac{1}{2}\right]$ b) $M_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ c) $M_{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $M_{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ e) $M_{\frac{1}{10}} = (-5, +\infty)$ f) $M_2 = (2, 10)$

AL - 046 Fie $P(x) = x^2 - x\log_a y + 3\log_a y - 8$, $y > 0$, $a \in (0,1)$. Să se determine toate valorile lui y astfel încât $P(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

a) $y \in (a^4, a^8)$ b) $y \in (a^8, a^4)$ c) $y \in [a^8, a]$
d) $y \in (a, 2)$ e) $y \in (a^3, a)$ f) $y \in [a^2, a]$

AL - 047 Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to (-1, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Calculați inversa sa, f^{-1}.

a) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x+1), x \in (-1,0) \\ x^2, x \in [0, +\infty) \end{cases}$ b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x-1), x \in (-1,0) \\ 2x, x \in [0, +\infty) \end{cases}$

c) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x, x \in (-1,0) \\ x, x \in [0, +\infty) \end{cases}$ d) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), x \in (-1,0) \\ x^2 - 1, x \in [0, +\infty) \end{cases}$

e) $f^{-1}(x)=\begin{cases}2\ln(x+1), & x\in(-1,0)\\ -x^2, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$ f) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\ln x^2, & x\in(-1,0)\\ x^2+1, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$

AL - 048 Se consideră expresia $E(x)=\log_4 x+\log_x 4$. Determinați valorile lui $x\in\mathbf{R}$ astfel încât $E(x)<\frac{5}{2}$.

a) $x\in(1,2)$ b) $x\in(0,1)\cup(2,16)$ c) $x\in[1,2]\cup[16,32]$

d) $x\in(16,+\infty)$ e) $x\in(1,2)\cup(20,+\infty)$ f) $x\in(1,10)\cup(20,+\infty)$

AL - 049 Să se determine numărul de elemente ale mulțimii

$$E=\left\{n\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\frac{15}{(n-1)!}\right\}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL – 050 Soluția ecuației

$$C_{x+8}^{x+3}=5(x+6)(x+5)(x+4)$$

se află în intervalul :

a) (14,19); b) (-8,-3); c) (-6,-4); d) (20,24) e) (21,27); f) (19,20).

AL - 051 Să se rezolve ecuația

$$3C_{x+1}^2+x\cdot P_2=4A_x^2.$$

a) x=3 b) x=4 c) x=5
d) x=2 e) x=7 f) x=10

AL - 052 Să se calculeze expresia:

$$E=\frac{C_n^k-C_{n-2}^k-C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}},\quad n\geq 3,\ k\geq 2,\ n\geq k+2.$$

a) $E=1$ b) $E=2$ c) $E=3$ d) $E=\frac{1}{2}$ e) $E=\frac{1}{3}$ f) $E=-1$

AL - 053 Determinați mulțimea A a valorilor lui $x\in\mathbf{R}$ pentru care: $C_{10}^{x-1}>2C_{10}^{x}$.

a) $A=(-\infty,-3)\cup(-1,1]$ b) $A=\{5,6,7\}$ c) $A=[1,7]$
d) $A=\{8,9,10\}$ e) $A=[-3,-2]\cup\{1,2\}$ f) $A=\{1,2,3,4\}$

AL - 054 Să se precizeze termenul care nu conține pe x din dezvoltarea binomului

$$\left(ax^{-\frac{1}{2}}+xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{30},\ a,x\in\mathbf{R}_{+}^{*}.$$

a) $C_{30}^{10}a^{15}$ b) $C_{30}^{5}a^{7}$ c) $C_{30}^{7}a^{5}$ d) $C_{30}^{4}a^{12}$ e) $C_{30}^{15}a^{14}$ f) $C_{30}^{8}a^{8}$

AL - 055 Care este expresia termenului din dezvoltarea binomului $\left(\frac{\sqrt{a}}{3}+\frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$, care conține pe a^4 ?

a) $187\frac{a^4}{3^7}$ b) $286\frac{a^4}{3^7}$ c) $107\frac{a^4}{3^5}$ d) $286\frac{a^4}{3^3}$ e) $202\frac{a^4}{3^7}$ f) $200\frac{a^4}{3^4}$

AL - 056 Care este termenul din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}}+\sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$, în care exponenții lui x şi y sunt egali ?

a) T_{13} b) T_{10} c) T_{6} d) T_{8} e) T_{15} f) T_{11}

AL - 057 În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali ai ultimilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle valorile lui x pentru care suma dintre termenul al treilea şi termenul al cincilea este egală cu 135.

a) $x_1=1, x_2=2$ b) $x=2$ c) $x_1=-1, x_2=2$
d) $x_1=-1, x_2=-2$ e) $x=1$ f) $x_1=1, x_2=-1$

AL – 058 Calculați $E=\left|\overline{z_1}z_2+1\right|^2+\left|z_1\overline{z_2}-1\right|^2$ pentru numerele complexe z_1 şi z_2 ($\overline{z}$ fiind complexul conjugat numărului z).

a) $2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ b) $2\left(1+|z_1z_2|^2\right)$ c) $2\left(1+|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)$

d) $2|z_1z_2|^2$ e) $\left(1+|z_1|^2\right)\left(|z_1|^2-1\right)$ f) $2\left(1+|z_1|^2-|z_2|^2\right)$

AL - 059 Să se găsească valorile reale ale lui m pentru care numărul

$3i^{43}-2mi^{42}+(1-m)i^{41}+5$ este real $\left(i^2=-1\right)$.

a) $m=-1$ b) $m=-2$ c) $m=-\dfrac{5}{2}$ d) $m=3$ e) $m=1$ f) $m=0$

AL - 060 Să se calculeze valoarea expresiei $E=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1996}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{1996}$.

a) i b) 2 c) –i d) –2 e) 2i f) –2i

AL - 061 Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât numărul complex $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{\alpha+(\alpha+1)i}$ să fie real.

a) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ d) $\dfrac{2\sqrt{3}+1}{4}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ f) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$

AL - 062 Să se determine numerele complexe z astfel încât $4z^2+8|z|^2-3=0$.

a) $z\in\left\{1\pm i,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ b) $z\in\left\{\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$ c) $z\in\left\{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\pm\dfrac{1}{2}\right\}$

d) $z\in\left\{\pm\dfrac{1}{2}i,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ e) $z\in\left\{-1\pm i,\dfrac{2\pm i\sqrt{5}}{2}\right\}$ f) $z\in\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{2},\dfrac{2i-5}{3},\dfrac{i+7}{2}\right\}$

AL – 063 Să se precizeze cu care din valorile date mai jos este egal $z=\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

a) $z=1+i$ b) $z=2$ c) $z=1-i$ d) $z=-i$ e) $z=i$ f) $z=2+i$

AL - 064 Căreia din mulțimile de mai jos aparține $\alpha=\dfrac{z}{|z|}+\dfrac{|z|}{z}$, pentru $z\in \mathbf{C}\setminus\{0\}$?

N b) **Z** c) **Q** d) **R** e) $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ f) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$

AL - 065 Să se determine toate numerele complexe $z\in\mathbf{C}$ care verifică ecuația $|z|-z=1+2i$.

a) $z=-\dfrac{1}{2}+i$ b) $z_1=-\dfrac{1}{2}+i, z_2=\dfrac{3}{2}-2i$ c) $z_1=0, z_2=\dfrac{3}{2}+2i$

d) $z=\dfrac{3}{2}-2i$ e) $z_1=0, z_2=-\dfrac{1}{2}+i$ f) $z=\dfrac{5}{2}+3i$

AL - 066 Fie α și β rădăcinile ecuației $x^2+x+1=0$. Să se calculeze $\alpha^{2000}+\beta^{2000}$.

a) 1 b) 0 c) –1 d) $i\sqrt{3}$ e) $-i\sqrt{3}$ f) 2

AL - 067 Precizați partea imaginară a numărului complex

$$\frac{1}{4+3i}+\frac{(2-i)^2}{1+i}-\frac{i}{4i-3}+\frac{6}{2-i}.$$

a) $-\dfrac{23}{10}i$ b) $-\dfrac{29}{10}i$ c) $\dfrac{19}{10}i$ d) $\dfrac{10}{13}i$ e) $-\dfrac{33}{10}i$ f) $-\dfrac{10}{33}i$

AL - 068 Să se calculeze $|z|$ dacă $z=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4$.

a) 1　　b) 2　　c) $\sqrt{2}$　　d) 16　　e) 4　　f) 6

AL - 069 Rădăcinile pătrate ale numărului complex 3+4i sunt :

a) 2+i, 2-i ;　　b) 2+i, -2-i ;　　c) 2+i, -2+1 ;
d) 2-i, -2+i ;　　e) 1+i, 1-i ;　　f) 1+i, 2+i

AL - 070 Să se calculeze rădăcina pătrată din numărul complex

$$z=-3+4i,\ \left(i=\sqrt{-1}\right).$$

a) $2+i, 2-i$　　b) $1+2i, -1+2i$　　c) $1+2i, -1-2i$
d) $-2+i, 2+i$　　e) $1-2i, -1-2i$　　f) $2-i, -1-2i$

AL - 071 Fie z un număr complex astfel încât $|z-a|=\sqrt{a^2-b^2}$, unde, $a>b>0$. Să se calculeze $\left|\dfrac{b-z}{b+z}\right|$.

a) a　　b) $\sqrt{1-\dfrac{b}{a}}$　　c) $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$　　d) $\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$　　e) $\sqrt{1+\dfrac{b}{a}}$　　f) $\dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$

AL – 072 Numerele complexe z_1 şi z_2 satisfac relaţia: $|z_1+z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.
Care din afirmaţiile următoare este adevărată ?

a) $z_1 = 0$, $z_2 = 1-i$　　b) $z_1 = z_2 = 2+3i$　　c) $|z_1|=0, |z_2|>0$

d) $|z_1|>2$ şi $|z_2|>2$　　e) cel puţin unul din cele două numere are modulul mai mic sau egal cu 2.　　f) $|z_1|>2$, $|z_2|=0$

AL – 073 Aflaţi $a\in\mathbf{R}$ astfel ca matricea diagonală constantă

$X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ să fie soluţia comună a ecuaţiilor matriceale

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = 1 \text{ şi } \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1$$

a) $a = \dfrac{3}{10}$ b) $a = \dfrac{2}{10}$ c) $a = \dfrac{1}{10}$

d) $a = \dfrac{10}{3}$ e) $a = \dfrac{10}{2}$ f) $a = 10$

AL - 074 Se dau matricele pătratice de ordinul al doilea $E = \begin{pmatrix}-5 & 3\\4 & 6\end{pmatrix}$ şi $F = \begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 7\end{pmatrix}$.

Să se calculeze matricea

$$A = 2E - 3F$$

a) $A = \begin{pmatrix}13 & 12\\-1 & -9\end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix}-13 & 12\\-1 & -9\end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix}13 & -12\\-1 & -9\end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix}13 & 12\\1 & 9\end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix}13 & 12\\-1 & 9\end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix}13 & 12\\1 & -9\end{pmatrix}$

AL - 075 Fie $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\2 & 1 & -1\\3 & -1 & 3\end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Z})$.

Dacă $f(x) = 3x$ să se calculeze $f(A)$.

a) $f(A) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\2 & 1 & -1\\3 & -1 & 3\end{pmatrix}$ b) $f(A) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\6 & 1 & -1\\9 & -1 & 3\end{pmatrix}$ c) $f(A) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 6\\6 & 3 & -3\\9 & -3 & 9\end{pmatrix}$

d) $f(A)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ e) $f(A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ f) $f(A)=I_3$

AL - 076 Să se calculeze produsul de matrice $A\cdot B$, unde

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 11 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 11 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

AL - 077 Să se rezolve ecuația matriceală:

$$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 078 Să se rezolve ecuația matriceală:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 079 Să se rezolve ecuația matriceală

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 080 Să se determine matricea X care verifică relația: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

AL - 081 Să se rezolve ecuația matriceală $X\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) $X = \begin{pmatrix} 6 & -31 & -5 \\ 4 & -12 & -14 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 6 & -32 & -21 \\ 4 & -23 & -14 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -31 & 2 \\ 5 & -11 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 5 & -31 & 4 \\ 4 & -12 & 10 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 6 & -32 & 21 \\ 4 & -23 & 14 \end{pmatrix}$

AL - 082 Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că A^n este de forma: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi să se determine apoi a_n, $n \in \mathbf{N}$.

a) $a_{n+1} = a_n + 2, a_n = 2n$ b) $a_{n+1} = a_n, a_n = 1$ c) $a_{n+1} = a_n + 1, a_n = n$

d) $a_{n+1} = 2a_n, a_n = 2^n$ e) $a_{n+1} = a_n + 2, a_n = 2^n$ f) $a_{n+1} = 2a_n, a_n = 2n^2$

AL - 083 Să se calculeze $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{30}$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

AL - 084 Fiind dată matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, să se calculeze matricea A^n, $n\in$ **N***.

a) $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n^2(n-1)}{4}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ b) $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ c) $A^n=\begin{pmatrix}1&n&3n\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

d) $A^n=\begin{pmatrix}1&3n&n^2\\0&1&3n\\0&0&1\end{pmatrix}$ e) $A^n=\begin{pmatrix}1&n^2&n^3-1\\0&1&n^2\\0&0&1\end{pmatrix}$ f) $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

AL - 085 Să se calculeze A^n, $n\in$ **N*** unde $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

a) $A^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1&0\\0&1&0\\0&0&2n\end{pmatrix}$ b) $A^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n+1&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$ c) $A^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$

d) $A^n=\begin{pmatrix}1&2^n&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$ e) $A^n=\begin{pmatrix}2^n&1&2^n\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$ f) $A^n=\begin{pmatrix}2^n&n^2-1&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$

AL - 086 Să se calculeze inversa matricei $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{pmatrix}$

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -7 & 1\\ -8 & 6 & -1\\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2}\\ -8 & 6 & -1\\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

e) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 1 & 3\\ -1 & \frac{2}{3} & 5\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ f) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

AL – 087 Se dă ecuația $\begin{vmatrix}x^3 & 1 & x\\ 1 & -1 & 1\\ x & 1 & a\end{vmatrix}=0$; $a\in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$. Să se determine parametrul a astfel încât între rădăcinile ecuației să existe relația $x_1^2+x_2^2+x_3^2-1<\left(x_1x_2x_3\right)^2$.

a) $a\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ b) $a\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ c) $a\in[-1,2]$

d) $a\in[1,2]$ e) $a\in(-\infty,1]$ f) $a\in[1,+\infty)$

AL - 088 Să se rezolve ecuația: $X^2=\begin{pmatrix}1 & 12\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, $X\in M_2(\mathbf{Z})$.

a) $X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ c) $X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

d) $X=\begin{pmatrix}i\sqrt{3} & -\frac{6i}{\sqrt{3}}\\ \frac{2i}{\sqrt{3}} & i\sqrt{3}\end{pmatrix}$ e) $X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ f) $X=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

AL - 089 Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi h_a, h_b, h_c sunt înălțimile corespunzătoare, care este valoarea determinantului: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_c \cdot h_a \\ 1 & c & h_b \cdot h_a \end{vmatrix}$?

a) $\Delta = abc$ b) $\Delta = 0$ c) $\Delta = a^2+b^2+c^2$

e) $\Delta = 1$; e) $\Delta = 2abc$ f) $\Delta = \frac{1}{2}(ab+ac+bc)$

AL - 090 Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) 8 b) 6 c) 16 d) 17 e) 18 f) 0

AL - 091 Să se calculeze determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & a \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}$$

a) 0 b) $2a^2$ c) $4a^2$

d) $6a^2$ e) 1 f) -1

AL - 092 Să se calculeze $\det\left(A^{-1}\right)$ dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{11}$ d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{1}{11}$ f) $\frac{1}{5}$

AL - 093 Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$. Să se calculeze determinantul matricii $A\cdot B$.

a) -2; b) -1; c) 0; d) 1; e) 2; f) 3

AL - 094 Care sunt soluțiile ecuației $\begin{vmatrix}4-x&1&4\\1&2-x&2\\2&4&1-x\end{vmatrix}=0$?

a) $x_1=3, x_2=7, x_3=-1$

b) $x_1=0, x_2=1, x_3=3$

c) $x_1=7,\ x_2=\sqrt{5}, x_3=-\sqrt{5}$

d) $x_1=x_2=7, x_3=1$

e) $x_1=7,\ x_2=\sqrt{3}, x_3=-\sqrt{3}$

f) $x_1=-2,\ x_2=7, x_3=1$

AL - 095 Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix}a^2-x&ab&ac\\ba&b^2-x&bc\\ca&cb&c^2-x\end{vmatrix}=0$.

a) $x_1=x_2=x_3=0$

b) $x_1=x_2=x_3=a$

c) $x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=c$

d) $x_1=x_2=0, x_3=a^2+b^2+c^2$

e) $x_1=x_2=0,\ x_3=a^2+b^2-c^2$

f) $x_1=x_2=1,\ x_3=0$

AL - 096 Fie matricea $A=(a_{ij}),\ 1\le i\le 3,\ 1\le j\le 3$, cu elementele

$a_{ij}=\min\{|i+j-3|, |i-2j+3|\}$. Să se calculeze $\det A$ şi A^{-1}.

a) $\det A = 2$, $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\det A = -3$, $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\det A = 2$, $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\det A = -3$, $A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ f) $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

AL - 097 Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$

a) Δ = 1 b) Δ = -1 c) Δ = 2 d) Δ = 4 e) Δ = 3 f) Δ = 0

AL - 098 Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y + 3z = 5 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$.

a) (1,1,0) b) (1,-1,1) c) (-4,0,3)

d) (0,0,2) e) (1,0,0) f) (1,0,2)

AL - 099 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

a) x =1, y =2, z =3 b) x =2, y =1, z =1 c) x =3, y =2, z =2

d) x =1, y =1, z =4 e) x =1, y =3, z =2 f) x =1, y =7, z =6

AL - 100 Care sunt valorile parametrului $m\in\mathbf{R}$ pentru care sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ x + y + mz = 4 \end{cases}$$ admite soluție unică ?

a) $m\in\mathbf{R}\setminus\{-2,1\}$ b) $m\in\mathbf{R}\setminus\{2,-1\}$ c) $m\in\mathbf{R}\setminus\{-2,-1\}$

d) $m\in\mathbf{R}\setminus\{2,1\}$ e) $m\in\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$ f) $m\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$

AL – 101 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x - 2y + z = m \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

Să se determine parametrul real m pentru ca sistemul să fie incompatibil.

a) $m = 1$, $m = -2$; b) $m = 2$, $m = -2$; c) $m = -1$, $m = 0$;

d) $m = 3$, $m = 4$; e) $m = -3$, $m = 3$; f) $m = 0$, $m = -2$.

AL - 102 Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel ca sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \\ 5x + 4y = m \end{cases}$$

să fie compatibil.

a) 0 b) 1 c) 20
d) 23 e) 8 f) 21

AL - 103 Pentru ce valoare a parametrului real $m\in\mathbf{R}$ sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + 5y + 4z = 4 \\ x + 2y + z = m \end{cases}$$

este compatibil şi nedeterminat de ordinul întâi ?

a) $m=-1$ b) $m=2$ c) $m=-2$ d) $m=1$ e) $m=-3$ f) $m=3$

AL - 104 Să se determine valorile parametrilor reali *a* şi *b* pentru care sistemul

$$\begin{cases} x+2y-2z=-6 \\ 2x+\ y+bz=\ 4 \\ ax-\ y+\ z=\ 8 \end{cases}$$ este incompatibil.

a) $a \neq \frac{1}{2}$ şi $b \neq -1$
b) $\begin{cases} a=-\frac{1}{2}\ , b\in \mathbf{R} \text{ sau} \\ a\in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{4}{7}\right\}, b=-1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} a\neq -\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$

d) $a \neq \frac{1}{2}$ şi $b\in \mathbf{R}$
e) $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$
f) $\begin{cases} a=\frac{4}{7} \\ b=-1 \end{cases}$

AL - 105 Se consideră sistemul liniar $\begin{cases} mx+\ \ y-2z=2 \\ 2x+\ \ y+3z=1 \\ (2m-1)x+2y+\ \ z=n \end{cases}$, $m,n\in \mathbf{R}$.

Pentru ce valori ale parametrilor *m* şi *n* sistemul este compatibil simplu nedeterminat?

a) $m=3$, $n\neq3$
b) $m=3$, $n=3$
c) $m\neq3$, $n=3$
d) $m\neq3$, $n\neq3$
e) $m=3$, $n=0$
f) $m=3$, $n=2$

AL - 106 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real *m* pentru care sistemul următor este compatibil

$$\begin{cases} x-\ \ my+\ \ 1\ =0 \\ 2x+\ \ y-\ \ m\ =0 \\ 3x+(m-1)y+m-1\ =0 \end{cases}.$$

a) $\{0,2\}$
b) $\varnothing$
c) $\{1,0\}$
d) $\{-1,1\}$
e) $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$
f) $\{3,2\}$

AL - 107 Pe **R** se consideră legea de compoziţie internă „*” definită astfel:

$$x*y=2xy-2x-2y+m, \qquad m\in \mathbf{R}$$

Să se determine m astfel încât această lege să fie asociativă.

a) m=1
b) m=2
c) m=3
d) m=4
e) m=-1
f) m=-2

AL – 108 Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = \ln\left(e^x + e^y\right)$; precizați mulțimea soluțiilor ecuației $(x * x) * x = 0$

a) $\left\{\ln\sqrt{3}, \ln\frac{1}{3}\right\}$ b) $\left\{\ln\frac{1}{3}, -\ln\frac{1}{3}\right\}$ c) $\left\{-\ln\sqrt{3}\right\}$

d) $\left\{-\ln\frac{1}{3}\right\}$ e) $\{-\ln 3\}$ f) $\{\ln 3\}$

AL - 109 Pe mulțimea $A = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ se consideră legea de compoziție „*” definită prin:

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + c,\ (\forall)x, y \in A,\quad c \in \mathbf{R}$$

Pentru ce valoare a lui c legea „*” este asociativă?

a) c=1 b) c=-1 c) c=3

d) c=2 e) c=4 f) c=6

AL - 110 Fie legea de compoziție internă pe **R** definită prin $x * y = xy + 2\alpha x + \beta y\quad (\forall)x, y \in \mathbf{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Care sunt valorile lui α și β pentru care legea este comutativă și asociativă ?

a) $\alpha = \beta = 0$ sau $\alpha = \frac{1}{2}$ și $\beta = 1$ b) $\alpha + \beta = 1$

c) $\alpha = \beta = 0$ sau $\alpha = \frac{1}{2}$ și $\beta = 2$ d) $\alpha = \beta = 1$

e) $\alpha = \beta = -1$ f) $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$

AL - 111 În mulțimea **R** este definită legea de compoziție internă „*” astfel încât $(\forall)x, y \in \mathbf{R}$: $x * y = \frac{x + y}{1 - xy}$ cu $xy \neq 1$.

Elementul neutru e, admis de lege este:

a) 0 b) 1 c) –1

d) 2 e) –2 f) 3

AL – 112 Pe **R** se defineşte legea de compoziţie „*” prin $x * y = axy - x - y + 2$, unde $a \in \mathbf{R}$. Pentru ce valori ale lui a legea considerată admite element neutru?

a) $a = -1$ b) 0 c) $a = 1$

d) $a = \frac{1}{2}$ e) $a = -\frac{1}{2}$ f) $a = \frac{3}{2}$

AL - 113 Determinaţi elementul neutru al operaţiei * definită în $\mathbf{R}^2$ prin

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 + x_1 + x_2, y_1y_2 + y_1 + y_2)$$

a) (1,0) b) (0,1) c) (1,1)

d) (0,0) e) (-1,-1) f) (0,-1)

AL - 114 Să se determine elementul neutru al grupului comutativ (*G*,*), unde $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ iar $x * y = x^{\ln y}$

a) 1 b) e c) 0 d) 2 e) $\frac{1}{e}$ f) e^2

AL - 115 Pentru ce valori ale parametrului real λ intervalul $(2,+\infty)$ este monoid în raport cu legea de compoziţie definită pe **R** prin :

$$x * y = xy - 2x - 2y + \lambda, \ (\forall) x, y \in \mathbf{R} \ ?$$

a) $\lambda \in (-\infty, 6)$ b) $\lambda \in (6, +\infty)$ c) $\lambda = 6$

d) $\lambda = 0$ e) $\lambda \in (0, +\infty)$ f) $\lambda \in (-\infty, 0)$

AL - 116 În mulţimea **R** a numerelor reale se consideră legea de compoziţie ’’$\oplus$’’ definită prin : $x \oplus y = ax + by - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$. Să se determine parametrii reali *a* şi *b* astfel încât această lege de compoziţie să determine pe **R** o structură de grup abelian.

a) $a = 1, b = 0$ b) $a = 2, b = -1$ c) $a = b = 1$

d) $a = 2, b = 1$ e) $a = 1, b = 2$ f) $a = 0, b = 1$

AL - 117 Se consideră grupul abelian ($\mathbf{R}$, $*$) cu legea de compoziție :

$x * y = \left(\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{a}\right)^k$, unde $a \in \mathbf{R}$ este un număr fixat , iar k este impar și $k \geq 3$. Care este elementul neutru și care este simetricul elementului $x \in \mathbf{R}$ în raport cu legea considerată ?

a) $a\,;\left(\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{x}\right)^k$ b) $a\,;\left(\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}\right)^k$ c) $a\,;\left(2\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}\right)^k$

d) $1;\left(\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{x}\right)^k$ e) $1;\left(\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}\right)^k$ f) $1;\left(2\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{x}\right)^k$

AL - 118 Să se determine partea mulțimii $\mathbf{Z}$ pe care legea de compoziție definită prin : $x * y = x + y + xy,\ (\forall) x, y \in \mathbf{Z}$ determină o structură de grup abelian propriu.

a) $\mathbf{Z}$ b) $\mathbf{Z} \setminus \{1\}$ c) $\mathbf{Z} \setminus \{-1\}$ d) $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ e) $\{-2,0\}$ f) $\{0\}$

AL - 119 Fie $M = \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. Să se determine $m, a, b \in \mathbf{R}^*$ astfel ca legea $x * y = 2xy - 3x - 3y + m$ să determine pe M o structură de grup abelian , iar aplicația $f : (M , *) \to \left(\mathbf{R}^*, \bullet\right),\ f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între (M , $*$) și grupul multiplicativ al numerelor reale, diferite de zero.

a) $m = 6\,;a = 2\,;b = -3$ b) $m = 6\,;a = 1\,;b = 2$ c) $m = 5\,;a = -1\,;b = 1$

d) $m = 2\,;a = \dfrac{2}{3}\,;b = \dfrac{1}{2}$ e) $m = -3\,;a = \dfrac{1}{2}\,;b = \dfrac{2}{3}$ f) $m = 3\,;a = 3\,;b = -4$

AL - 120 Fie grupurile $(\mathbf{R}, +)$ și $((0,+\infty), \cdot)$. În ce condiții funcția $f : \mathbf{R} \to (0,+\infty),\ f(x) = e^{\alpha x + \sqrt{\alpha^2 - 11} - \sqrt{\alpha^2 - 20} - 1},\ \alpha \in \mathbf{N},\ \alpha \geq 5$ este un izomorfism de grupuri ?

a) $\alpha = 5$ b) $\alpha \in \varnothing$ c) $\alpha = 8$ d) $\alpha = 6$ e) $\alpha = 7$ f) $\alpha = 9$

AL - 121 Fie grupul (A , +) unde $A = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ și ''+'' este legea de compoziție definită prin :

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), (\forall)(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in A .$$

Pentru ce $m \in \mathbf{R}$ funcția $f : A \to A$ cu

$$f(x_1, x_2, x_3) = (mx_1 + x_2 + x_3, x_1 + mx_2 + x_3, x_1 + x_2 + mx_3)$$

este un automorfism al grupului (A , +) ?

a) $m = \pm 1$ b) $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ c) $m \in \{-1,3\}$
d) $m = -2$ e) $m \in \varnothing$ f) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2,1\}$

AL - 122 Fie $G = (2,+\infty)$ care are o structură de grup față de operația ''$*$'' definită prin : $x * y = xy - 2(x + y) + 6$, $(\forall) x, y \in G$. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbf{R}_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ pentru orice $x \in \mathbf{R}_+^*$, să realizeze un izomorfism de la grupul $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

a) $a = 0, b = 2$ b) $a = 1, b = 2$ c) $a = 0, b = 3$
d) $a = 1, b = 3$ e) $a = b = 1$ f) $a = -1, b = 2$

AL - 123 Fie $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{Z}\}$. Să se determine $a \in \mathbf{Z}$ pentru care operațiile

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{și}$$
$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 y_2 + y_1 x_2, a y_1 y_2)$$

determină pe $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ o structură de inel cu elementul unitate e=(0,1). În acest caz să se determine divizorii lui zero dacă există.

a) a=1; nu există b) a=1; (x,0), $x \in \mathbf{Z}^*$ c) a=0; (x,0), $x \in \mathbf{Z}^*$
d) $(\forall) a \in \mathbf{Z}$; nu există e) $\forall a \in \mathbf{Z}$; (0,y), $y \in \mathbf{Z}^*$ f) $(\forall) a \in \mathbf{Z}$;($x$,0), $x \in \mathbf{Z}^*$

AL – 124 Fie inelul $(\mathbf{Z}, \oplus, \circ)$ unde legile de compoziție sunt definite prin

$$x \oplus y = x + y - p; \quad x \circ y = xy - px - py + p^2 + p, \quad p \in \mathbf{Z}^*.$$

Să se stabilească dacă inelul are sau nu divizori ai lui zero. În caz afirmativ să se determine divizorii lui zero.

a) Da; $2p$, p-1; b) Nu; c) Da; p, p;
d) Da; 0, p+1; e) Da; $2p$,p; f) Da; $2p$, p+1.

AL - 125 Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Pe $\mathbf{R}$ definim legile de compoziție ''$\perp$'' şi ''T'' prin: $x \perp y = ax + by - 2,\ (\forall) x, y \in \mathbf{R}$ şi $x \mathrm{T} y = xy - 2x - 2y + c,\ (\forall) x, y \in \mathbf{R}$. Care sunt valorile a, b, c astfel încât ($\mathbf{R}$, $\perp$, T) să fie corp ?

a) $a = 0, b = 0, c = 3$ b) $a = 1, b = 1, c = 6$ c) $a = 0, b = 1, c = 6$
d) $a = 1, b = 1, c = 3$ e) $a = 1, b = 1, c = -3$ f) $a = 1, b = 0, c = 6$

AL - 126 Să se rezolve următorul sistem de ecuații în corpul claselor de resturi modulo 11: $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{5} \\ \hat{7}x + \hat{3}y = \hat{8} \end{cases}$.

a) $(\hat{9}, \hat{0})$ b) $(\hat{0}, \hat{9})$ c) $(\hat{6}, \hat{9})$ d) $(\hat{8}, \hat{9})$ e) $(\hat{5}, \hat{0})$ f) $(\hat{6}, \hat{0})$

AL - 127 Care sunt soluțiile sistemului: $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$ în inelul $\mathbf{Z}_{12}$?

a) $x = \hat{2}, y = \hat{7}$ b) $x = \hat{1}, y = \hat{4}$ c) $x = 1\hat{0}, y = \hat{3}$
d) incompatibil e) $x = 1\hat{1}, y = \hat{2}$ f) $x = \hat{8}, y = \hat{3}$

AL – 128 Să se determine valoarea parametrului real m astfel încât polinomul $P(x) = x^4 - x^2 + 2x - 1 + m$ să se dividă cu x+1.

a) 0 b) –1 c) 3 d) 1 e) –1 f) 2

AL – 129 Să se determine câtul q şi restul r al împărțirii polinomului

$$f = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

la polinomul $g = x^2 - 3x + 1$.

a) $q = 2x^2 + 3x + 11, r = 25x - 5;$ b) $q = 2x^2 + 3x - 11, r = 25x + 5;$
c) $q = 2x^2 - 3x + 7, r = 5x - 1;$ d) $q = 2x^2 + 2, r = x + 2;$
e) $q = 2x^2 + 3x - 6, r = -x + 2;$ f) $q = 2x^2, r = 2x + 5;$

AL - 130 Fie P un polinom cu coeficienți reali. Dacă resturile împărțirii lui P la $x - a$ şi $x - b$, $(a \neq b)$ sunt egale, să se determine restul împărțirii lui P

la polinomul $(x-a)(x-b)$.

a) $ax+b$ b) $bx+a$ c) $P(a)$ d) $bx+1$ e) $x+a$ f) $x+b$

AL - 131 Să se determine restul împărțirii polinomului

$$P(x)=(x-2)^{2n}+(x-1)^{n}-1 \text{ la polinomul } Q(x)=x^2-3x+2.$$

a) $x+1$ b) $x-1$ c) 0 d) $x+2$ e) $2x+1$ f) $2x-1$

AL - 132 Fie $f\in\mathbf{R}[X]$ un polinom de grad cel puțin doi. Dacă f dă restul 2 prin împărțirea la $X+1$ și $(X+2)f(X)-Xf(X+3)=1$, să se determine restul împărțirii lui f la X^2-X-2.

a) $1-X$ b) $1+X$ c) 1 d) 0 e) X^2-X-2 f) X

AL - 133 Să se determine toate polinoamele de gradul trei care se divid la x-1, iar resturile împărțirii la x-2, x-3 și x-4 sunt egale.

a) $\alpha(x^3-9x^2+26x-18)$ b) $\alpha(x^3+9x^2+26x-18)$
c) $\alpha(x^3-9x^2-26x-18)$ d) $\alpha(x^3-9x^2+26x+18)$
e) $\alpha(x^3+9x^2-26x-18)$ f) $\alpha(x^3+9x^2+26x+18)$ $\alpha\in\mathbf{R}$

AL - 134 Fie P un polinom cu coeficienți reali de grad mai mare sau egal cu 3, iar $R=mX^2+nX+p$ restul împărțirii lui P prin produsul $(X^2-1)(X-2)$. Să se determine m, n și p astfel încât resturile împărțirii lui P prin $X-1, X-2$ și $X+1$ să fie, respectiv, -2, 3, -6.

a) $m=1, n=2, p=-1$ b) $m=1, n=-1, p=2$ c) $m=-7, n=26, p=-21$
d) $m=1, n=2, p=-5$ e) $m=-1, n=3, p=1$ f) $m=1, n=2, p=3$

AL - 135 Determinați puterile naturale n pentru care polinomul

$$f=(X^2+X+1)^{3n}+(2X-2)^{3n} \text{ este divizibil prin } g=X^2-X+1.$$

a) $n=3p,\ p\in\mathbf{N}$ b) $n=3p+1,\ p\in\mathbf{N}$ c) $n=3p+2,\ p\in\mathbf{N}$
d) $n=2p,\ p\in\mathbf{N}$ e) $n=2p+1,\ p\in\mathbf{N}$ f) $n\in\mathbf{N}$

AL - 136 Să se determine parametrii $a,b\in$ **R** astfel încât polinomul

$P(x)=2x^4-2x^3+ax+b$, să fie divizibil cu $Q(x)=x^2-3x+2$.

a) $a=12$, $b=-12$ b) $a=16$, $b=-16$ c) $a=-16$, $b=16$

d) $a=16$, $b=-14$ e) $a=15$, $b=-15$ f) $a=13$, $b=-13$

AL – 137 Să se determine restul $R(x)$ al împărțirii polinomului
$Q(x)=x^{3n-1}+ax+b$ la x^2+x+1, $n\in \mathbf{N}^+$.

a) $R(x)=(a^2-1)x+b^2-1$ b) $R(x)=(a+1)x+b+1$ c) $R(x)=ax+b$
d) $R(x)=(a-1)x+b-1$ e) $R(x)=(a-1)x+1-b$ f) $R(x)=(a-1)x+b+1$

AL - 138 Fie $f\in\mathbf{Z}[X]$, $f=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$. Determinați coeficienții polinomului f, dacă $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=n^4$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$.

a) $f=-1+3X-5X^2+4X^3$ b) $f=2-2X-3X^2+2X^3$

c) $f=-1+4X+6X^2+4X^3$ d) $f=-1+4X-6X^2+4X^3$

e) $f=-2-2X+3X^2-2X^3$ f) $f=1-4X-6X^2+4X^3$

AL - 139 Determinați ordinul de multiplicitate $m\in\mathbf{N}$ al rădăcinii $x=2$ a ecuației : $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=0$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL - 140 Fie $P\in\mathbf{R}[X]$, $P=aX^3+bX^2+cX+d$, $a,b\neq 0$. Să se determine relația dintre coeficienții a, b, c, d pentru care rădăcinile lui P sunt în progresie aritmetică.

a) $3b^3+27ab+9abc=0$ b) $2b^3-27a^2d+9abc=0$ c) $2b^3+27a^2d-9abc=0$
d) $3a^3+27abc-9bd=0$ e) $3c^3+27abc=0$ f) $2c^3+27a^2d-9abc=0$

AL - 141 Fie polinomul $P \in \mathbf{R}[X]$, $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a, d \neq 0$. Să se determine relația dintre coeficienții *a*, *b*, *c*, *d* pentru ca rădăcinile polinomului *P* să fie în progresie geometrică.

a) $a^2 b = c^2 d$ b) $a^2 b^2 = c^2 d$ c) $ab^3 = c^3 d$
d) $ac^3 = b^3 d$ e) $ac = bd$ f) $a^3 c = b^3 d$

AL - 142 Care este relația dintre *a* și *b* atunci când ecuația $x^3 - 3ax + 2ab = 0$, $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, are o rădăcină dublă.

a) $2b = 3a$ b) $b^2 = a\sqrt{2}$ c) $b^2 = a$ d) $a^3 = 5b$ e) $a = 2b$ f) $a = b$

AL - 143 Să se determine $m \in \mathbf{R}$ știind că rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 + 2x^2 - mx + 1 = 0$ satisfac relația $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 24$.

a) $m = 0, m = -1$ b) $m = 1, m = -1$ c) $m = 0, m = 1$

d) $m = 0, m = -8$ e) $m = -1, m = 3$ f) $m = 4, m = 0$

AL - 144 Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 + x^2 - 3 = 0$, să se precizeze care din ecuațiile următoare are drept rădăcini :

$$y_1 = x_2 + x_3,\ y_2 = x_3 + x_1,\ y_3 = x_1 + x_2.$$

a) $y^3 - y + 2 = 0$ b) $2y^3 - y - 1 = 0$ c) $2y^3 + y + 7 = 0$
d) $y^3 + 2y^2 + y + 3 = 0$ e) $y^3 + y - 2 = 0$ f) $y^3 - 2y^2 + y - 3 = 0$

AL - 145 Să se rezolve ecuația : $x^3 - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)x^2 + \left(1 + 4\sqrt{2}\right)x - 2 = 0$, știind că ea admite rădăcina $1 + \sqrt{2}$.

a) $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 2$ b) $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ c) $1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 2$

d) $1 + \sqrt{2}, -2, -2$ e) $1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ f) $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, -2\sqrt{2}$

AL - 146 Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca ecuația $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 17 = 0$ să aibă rădăcinile în progresie aritmetică.

a) $a=2, b=-17$ b) $a=12, b=-19$ c) $a=-52, b=12$
d) $a=-14, b=36$ e) $a=21, b=36$ f) $a=52, b=40$

AL - 147 Să se rezolve ecuația: $x^3-2x^2+\left(1+2\sqrt{2}\right)x+2=0$, ştiind că admite rădăcina $1-\sqrt{2}$.

a) $x_1=1-\sqrt{2},\ x_{2,3}=\dfrac{1+\sqrt{2}\pm i\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{2}$ b) $x_1=1-\sqrt{2}, x_{2,3}=\dfrac{\pm i\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{2}$
c) $x_1=1-\sqrt{2},\ x_2=1+\sqrt{2},\ x_3=1+\sqrt{2}$ d) $x_1=1-\sqrt{2},\ x_2=1+\sqrt{2},\ x_3=\sqrt{1-\sqrt{2}}$
e) $x_1=1-\sqrt{2},\ x_{2,3}=\pm\sqrt{5+6\sqrt{2}}$ f) $x_1=1-\sqrt{2},\ x_2=1+\sqrt{2},\ x_3=\sqrt{5+6\sqrt{2}}$

AL – 148 Să se determine valorile raționale ale parametrilor a şi b astfel încât $1+\sqrt{2}$ să fie rădăcină a ecuației : $x^4+ax^3+bx^2+5x+2=0$.

a) $a=-3, b=-1$ b) $a=3, b=1$ c) $a=-3, b=1$

d) $a=2, b=1$ e) $a=-2, b=-1$ f) $a=-2, b=1$

AL - 149 Să se determine parametrii reali a, b şi c ştiind că ecuațiile $x^4+ax^2+bx+2=0$ şi $x^3-3x+2c=0$ au o rădăcină dublă comună.

a) $a=-1, b=-2, c=1$; $a=-1, b=2, c=-1$ b) $a=1, b=2, c=2$ c) $a=-1, b=3, c=-1$; $a=1, b=-3, c=1$

d) $a=-2, b=3, c=-1$ e) $a=-1, b=3, c=1$; $a=1, b=2, c=-1$ f) $a=b=c=1$

AL - 150 Să se determine suma coeficienților polinomului obținut din dezvoltarea $\left(10x^8-x^4-8\right)^{1997}$.

a) 0 b) 1 c) 2^{1997} d) 10^{1997} e) C_{1997}^{8} f) 1997

ELEMENTE DE GEOMETRIE PLANĂ
ŞI TRIGONOMETRIE

ELEMENTE DE GEOMETRIE PLANĂ ŞI TRIGONOMETRIE
(simbol TG)

TG - 001 Să se calculeze: $E = \dfrac{\cos 15^0 - \sin 15^0}{tg 15^0 + ctg 15^0}$.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

TG - 002 Dacă $tga = 1,\ tgb = 2,\ tgc = 3$, cât este $tg\left(a+b+c\right)$?

a) 1 b) 0 c) 2 d) $\sqrt{3}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{2}{3}$

TG - 003 Dacă se notează $t = \sin 2u$, se cere să se exprime în funcţie de t expresia
$E = \mathrm{tg}^2 u + \mathrm{ctg}^2 u$.

a) $t^2 + 1$ b) $\dfrac{1}{t^2}$ c) $2t^2$ d) $\dfrac{1}{t^2} - 1$ e) $\dfrac{4}{t^2} - 2$ f) $\dfrac{1}{t^2 + 1}$

TG - 004 Dacă $\cos x = \dfrac{1}{7}$, $\cos y = \dfrac{13}{14}$ şi $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $x - y$.

a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{6}$ d) $\dfrac{\pi}{4}$ e) $\dfrac{5\pi}{4}$ f) π

TG - 005 Să se restrângă expresia: $E = \dfrac{\sin\left(45^0 + x\right) - \cos\left(45^0 + x\right)}{\sin\left(45^0 + x\right) + \cos\left(45^0 + x\right)} - \mathrm{tg}\, x$.

a) $E = 0$ b) $E = 1$ c) $E = \mathrm{tg}\, x$ d) $E = \mathrm{ctg}\, x$ e) $E = \sin x$ f) $E = \cos x$

TG - 006 Să se verifice că următoarea expresie este independentă de x

$$E = 2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - 3\left(\cos^4 x + \sin^4 x\right).$$

a) $E=-1$ b) $E=0$ c) $E=1$ d) $E=2$ e) $E=-2$ f) $E=\frac{1}{4}$

TG - 007 Ştiind că $\operatorname{ctg} x = 2$, să se calculeze: $E = \dfrac{\sin^2 x - 2\cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{7}$ e) $\frac{7}{3}$ f) $-\frac{7}{3}$

TG - 008 Să se calculeze valoarea expresiei: $E = \dfrac{\sin\frac{2x}{3} - \operatorname{tg} x}{\cos x - \operatorname{ctg} 2x}$ pentru $x = \frac{\pi}{4}$.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{1}{3}$

TG - 009 Ştiind că $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $-\frac{4}{3}$ f) $\frac{2}{3}$

TG - 010 Determinați perioada principală a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \cos\frac{7x}{5}$.

a) 0 b) $\frac{7\pi}{10}$ c) 35π

d) $\frac{10\pi}{7}$ e) $\frac{5\pi}{7}$ f) $\frac{3\pi}{4}$

TG - 011 Să se calculeze expresia $E = \dfrac{\sin 60^0 - \sin 30^0}{\cos 30^0 + \cos 60^0}$

a) $2+\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}-2$ c) $\sqrt{2}-3$

d) $3+\sqrt{2}$ e) $2-\sqrt{3}$ f) $2+\sqrt{2}$

TG - 012 Să se calculeze expresia: $\dfrac{\sin x + tgx}{\cos x + ctgx}$, ştiind că avem $\cos x = \dfrac{2}{3}$, $x \in [0, \pi/2]$.

a) $\dfrac{3}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)$ b) $\dfrac{4}{3}\left(3+\sqrt{5}\right)$ c) $\dfrac{16}{25}\left(3-\sqrt{5}\right)$

d) $\dfrac{16}{25}\left(3+\sqrt{5}\right)$ e) $\dfrac{25}{16}\left(3-\sqrt{5}\right)$ f) $\dfrac{25}{16}\left(3+\sqrt{5}\right)$

TG - 013 Arătaţi că următoarea expresie este independentă de *x*,

$$E = \frac{1+\sin^2 x}{2+\mathrm{ctg}^2 x} + \frac{1+\cos^2 x}{2+\mathrm{tg}^2 x}.$$

a) $E=\dfrac{1}{2}$ b) $E=\dfrac{1}{3}$ c) $E=\dfrac{1}{4}$ d) $E=1$ e) $E=2$ f) $E=3$

TG - 014 Să se calculeze

$$\frac{1}{cos^2 15^0} + \frac{1}{sin^2 15^0}$$

a) 4 b) 16 c) 24 d) $4\sqrt{2}$ e) $6\sqrt{2}$ f) $16\sqrt{2}$

TG - 015 Să se calculeze:

$$\frac{\mathrm{tg}15^0 + \mathrm{ctg}15^0}{\cos 15^0 - \sin 15^0}$$

a) 1 b) 4 c) $3\sqrt{2}$

d) $4\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{2}$ f) $\sqrt{2}$

TG - 016 Să se calculeze: $\dfrac{1}{\sin 10^0} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) $\dfrac{3}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

TG - 017 Să se calculeze: $\mathrm{tg}1^0 \cdot \mathrm{tg}2^0 \cdot \mathrm{tg}3^0 \cdot ... \cdot \mathrm{tg}89^0$.

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 0 d) $\sqrt{3}$ e) 10 f) 2

TG - 018 Se dă triunghiul *ABC* în care $AB = R\sqrt{3}$ şi $m\left(\widehat{BAC}\right) = \alpha$, R fiind raza cercului circumscris triunghiului. Să se determine celelalte laturi în funcție de α şi **R**.

a) $R\sqrt{3}, 2R\sin\alpha, 2R\sin\left(\alpha + 60^0\right)$ b) $R\sqrt{3}, 2R\sin\alpha, 2R\sin\left(\alpha + 30^0\right)$
c) $R\sqrt{3}, 2R\sin\alpha, 2R\sin\alpha$ d) $R\sqrt{3}, R\sqrt{3}, 2R\sin\alpha$
e) $R\sqrt{3}, R, R$ f) $R\sqrt{3}, 2R\sin\left(\alpha + 30^0\right), 2R\sin\alpha$

TG - 019 Între laturile unui triunghi avem relația: $2a = b + c$, iar între unghiurile sale $2\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$. Triunghiul este:

a) ascuțit unghic oarecare b) obtuz unghic oarecare c) isoscel
d) dreptunghic e) echilateral f) oarecare

TG - 020 În triunghiul *ABC* se dă $b = \sqrt{2}, c = \sqrt{3}$ şi $m\left(\hat{C}\right) = 60^0$. Să se calculeze latura *a*.

a) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$ b) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ şi $\sqrt{6} + \sqrt{2}$
d) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$ e) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$ şi $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$ f) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

TG - 021 Un triunghi *ABC* cu lungimile laturilor 13, 14, 15 are vârful *A* opus laturii de mărime mijlocie. Care este valoarea lui $tg\frac{A}{2}$?

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{6}{7}$ e) 1 f) $\frac{8}{7}$

TG - 022 Dacă *A,B,C* sunt măsurile unghiurilor unui triunghi să se calculeze:

$$E = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$$

a) $E = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$; b) $E = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tg} C$ c) $E = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$

d) $E = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$ e) $E = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} C$ f) $E = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tg} C$

TG - 023 Dacă în triunghiul *ABC* avem $tg\frac{A}{2} = \frac{1}{3}$ şi $b + c = 3a$, precizaţi care din răspunsurile de mai jos este corect.

a) $m\left(\hat{B}\right) = \frac{\pi}{2}$ sau $m\left(\hat{C}\right) = \frac{\pi}{2}$ b) $m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{B}\right)$ c) $m\left(\hat{A}\right) = \frac{\pi}{2}$

d) $m\left(\hat{B}\right) = \frac{\pi}{4}$ sau $m\left(\hat{C}\right) = \frac{\pi}{4}$ e) $m\left(\hat{A}\right) = m\left(\hat{C}\right)$ f) $m\left(\hat{A}\right) = \frac{\pi}{3}$

TG - 024 Să se calculeze aria triunghiului *ABC*, ştiind că $a = 6$, $B = 60^0$ şi $C = 45^0$.

a) $6\left(3+\sqrt{3}\right)$ b) $9\left(3-\sqrt{3}\right)$ c) $9\left(3+\sqrt{3}\right)$

d) $6\left(3-\sqrt{3}\right)$ e) $\frac{9}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$ f) $\frac{9}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$

TG - 025 Într-un triunghi *ABC* laturile *a, b, c* sunt îm progresie aritmetică, *a* fiind termenul din mijloc. Să se calculeze expresia:

$$E = tg\frac{B}{2} \cdot tg\frac{C}{2} .$$

a) $E=\frac{1}{3}$ b) $E=\frac{1}{6}$ c) $E=\frac{1}{2}$

d) $E=3$ e) $E=6$ f) $E=2$

TG - 026 Se dau punctele A(3,5), M(-1,3), N(4,1). Să se scrie ecuațiile dreptelor ce trec prin A şi fac unghiurile de 45° şi, respectiv ,135° cu dreapta (MN).

a) $3x - 7y + 26 = 0,\ 7x + 3y - 36 = 0$ b) $2x - 5y + 19 = 0,\ 5x - 2y - 5 = 0$

c) $x - y + 2 = 0,\ x + y - 8 = 0$ d) $3x - 2y + 1 = 0,\ 2x + 3y - 21 = 0$

e) $x - 2y + 7 = 0,\ 2x + y - 11 = 0$ f) $3x - 7y + 1 = 0,\ 7x - 3y - 2 = 0$

TG - 027 Să se afle coordonatele vârfurilor unui triunghi cunoscând mijloacele laturilor P(3,-1), Q(1,7), R(-4,3).

a) (-1,-4), (5,2), (-3,12) b) (-2,3), (8,-5), (-6,19) c) (-2,-5), (4,19), (-12,13)
d) (-2,-5), (8,3), (-6,11) e) (2,-3), (-10,9), (0,17) f) (1,-3), (5,1), (-9,9)

TG - 028 Se dau punctul A(-3,4) şi dreapta (d) $2x-y+5=0$. Să se determine coordonatele punctului B, simetricul lui A față de dreapta (d).

a) B(-1,3) b) B(2,1) c) B(1,-2)
d) B(1,2) e) B(3,-4) f) B(-1,2)

TG - 029 Fiind date numerele $a, b \in \mathbf{R}^*$, se consideră punctele A(a,0), B(0,b) şi M(0,λ) situate pe axele de coordonate (Ox) şi (Oy). Să se determine λ astfel ca proiecția punctului M pe dreapta (AB) să coincidă cu mijlocul segmentului $\overline{AB}$.

a) $\frac{a^2-b^2}{a}$ b) $\frac{a^2-b^2}{b}$ c) $\frac{a^2+b^2}{a}$

d) $\frac{b^2-a^2}{2a}$ e) $\frac{b^2-a^2}{2b}$ f) $\frac{a^2+b^2}{b}$

TG – 030 În sistemul cartezian (Oxy) se consideră punctele A(3,0), B(0,2), M(3,-3) şi N(-2,2) . Să se determine punctul de concurență al dreptelor (AN), (BM) şi al perpendicularei din O pe (AB).

a) $\left(\frac{18}{19},\frac{12}{19}\right)$ b) $\left(\frac{12}{19},\frac{18}{19}\right)$ c) $\left(\frac{8}{19},\frac{12}{19}\right)$

d) $\left(\frac{12}{19},\frac{8}{19}\right)$ e) $\left(\frac{18}{19},\frac{6}{19}\right)$ f) $\left(\frac{16}{19},\frac{18}{19}\right)$

TG - 031 Se dau punctele A(3,5), B(-1,3), C(4,1). Se cere să se scrie ecuația medianei din A a triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $2x + 5y - 31 = 0$ b) $x - 2y + 7 = 0$ c) $2x + y - 11 = 0$
d) $x + 2y - 13 = 0$ e) $2x - y - 1 = 0$ f) $3x - y - 4 = 0$

TG – 032 Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul de intersecție al dreptelor
$(d_1)\ \ x+2y-7=0,\ \ (d_2)\ \ 2x-y+1=0$
şi este paralelă cu prima bisectoare.
a) $2x-2y=1$; b) $y=x+7$; c) $x-y+5=0$
d) $x-y+2=0$; e) $x-y+3=0$; f) $3x-3y+7=0$.

TG - 033 Se dau dreptele (AB): $x - 2y + 3 = 0$, (AC): $2x - y - 3 = 0$,
(BC): $3x + 2y + 1 = 0$. Să se scrie ecuația înălțimii din A a triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $2x - 3y + 3 = 0$ b) $6x - 9y - 1 = 0$ c) $-4x + 6y - 1 = 0$

d) $2x - 3y - 1 = 0$ e) $6x - 9y + 2 = 0$ f) $4x - 6y + 3 = 0$

TG - 034 Se dă triunghiul $\overline{ABC}$ determinat de dreptele (AB): $x + 2y - 4 = 0$,
(BC): $3x + y - 2 = 0$, (CA): $x - 3y - 4 = 0$. Să se calculeze aria triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $A_{\Delta ABC} = 10$ b) $A_{\Delta ABC} = 8$ c) $A_{\Delta ABC} = 6$
d) $A_{\Delta ABC} = 5$ e) $A_{\Delta ABC} = 7$ f) $A_{\Delta ABC} = 9$

TG - 035 Să se determine λ astfel ca distanța de la punctul A(3,4) la dreapta variabilă $(\lambda+3)x - (\lambda-2)y + 3\lambda - 1 = 0$ să fie $d = \sqrt{10}$.
a) 4, -2 b) $1,-\frac{7}{4}$ c) $-\frac{9}{2},\frac{7}{4}$ d) $\frac{9}{2},-\frac{7}{4}$ e) $-1,\frac{7}{4}$ f) $\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$

TG - 036 Să se scrie ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul A(-5,7) şi sunt situate la distanţa 3 de punctul B(0,7).

a) $4x + 3y - 1 = 0,\ 4x - 3y + 41 = 0$ b) $4x + 5y - 15 = 0,\ 4x - 5y + 55 = 0$
c) $3x - 2y + 29 = 0,\ 3x + 2y + 1 = 0$ d) $3x + 4y - 13 = 0,\ 4x + 3y - 1 = 0$
e) $3x - 4y + 43 = 0,\ 3x + 2y + 1 = 0$ f) $3x - 4y + 43 = 0,\ 3x + 4y - 13 = 0$

TG - 037 Fie în planul (xOy) punctul M(-2,6) şi dreapta (d) $x + 2y - 5 = 0$. Să se afle distanţa simetricului punctului M în raport cu dreapta (d) până la prima bisectoare.

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

TG - 038 Fie în planul (xOy) punctele A(3,3) şi B(7, -3) şi dreapta (d) $4x-2y+3=0$. Să se afle punctul M de pe dreapta (d) care este echidistant faţă de punctele A şi B.

a) M(1,2) b) $M\left(-\frac{13}{4},-\frac{23}{4}\right)$ c) $M\left(-\frac{23}{4},-\frac{29}{4}\right)$

d) $M\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{4}\right)$ e) $M\left(-\frac{29}{8},-\frac{23}{4}\right)$ f) $M\left(-\frac{13}{8},-\frac{23}{4}\right)$

TG – 039 Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele $d_1 : 3x+my+2m+3=0$ şi $d_2 : 2x+(m-1)y+m+3=0$ să coincidă.

a) $m \in \varnothing$ b) m=0 c) m=1
d) m=2 e) m=3 f) m=4

TG – 040 Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele de ecuaţii $(d_1)\ x+2y-2=0$, $(d_2)\ 2x-4y+3=0$ şi $(d_3)\ \alpha x+y-1=0$ să fie concurente:

a) $\alpha=1$ b) $\alpha=0$ c) $\alpha=\frac{1}{2}$ d) $\alpha=-1$ e) $\alpha=-\frac{1}{2}$

TG – 041 Să se scrie ecuaţia dreptei din plan, ştiind că A(2, 3) este piciorul perpendicularei coborâtă din origine pe dreaptă.

a) 3x+2y-13=0; b) x+3y-11=0; c) 3x+y-9=0;

d) 2x+3y-13=0; e) 3x+4y-14=0; f) 4x+3y-17=0.

TG – 042 Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului ce uneşte punctele (3,1) şi (4,8)

a) 9x-7y=0 b) 7x-9y=0 c) x+7y-35=0
d) 7x-y-20=0 e) x+7z-20=0 f) x-y+1=0

TG – 043 Fie în planul (Oxy) punctele A(5,6), B(-4,3), C(-3,-2) şi D(6,1). Ce figură geometrică reprezintă patrulaterul ABCD ?

a) dreptunghi b) romb c) pătrat

d) trapez isoscel e) trapez dreptunghic f) paralelogram

TG – 044 Ştiind că punctul M(*x,y*) se află pe dreapta $D: x + y + 1 = 0$, să se determine minimul expresiei: $E = x^2 + y^2$.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

TG – 045 Se dă dreapta $(\alpha - 1)x + (\alpha - 2)y - \alpha + 3 = 0$ cu $\alpha \in \mathbf{R}$. Să se determine α astfel că dacă A,B sunt intersecţiile dreptei cu (Ox), respectiv (Oy), să avem:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 10.$$

a) $\alpha_1=3, \alpha_2=4$ b) $\alpha_1 = \frac{5}{2}$ $\alpha_2 = \frac{17}{4}$ c) $\alpha_1 = \frac{7}{2}$ $\alpha_2 = \frac{15}{4}$

d) $\alpha_1 = -\frac{5}{2}$ $\alpha_2 = \frac{17}{4}$ e) $\alpha_1 = \frac{5}{2}$ $\alpha_2 = -\frac{17}{2}$ f) $\alpha_1 = -\frac{7}{2}$ $\alpha_2 = -\frac{15}{4}$

TG – 046 Pe catetele $\overline{OB}$ şi $\overline{OC}$ ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în afară pătrate în care vârfurile opuse lui O sunt, respectiv, D şi E. Să se determine coordonatele punctului H de intersecţie a dreptelor (CD) şi (BE), dacă B(*b*,0) iar C(0,*c*).

a) H $\left(\dfrac{bc^2}{b^2+c^2+bc}, \dfrac{b^2c}{b^2+c^2+bc}\right)$ b) H $\left(\dfrac{bc^2}{b^2+c^2-bc}, \dfrac{b^2c}{b^2+c^2-bc}\right)$

c) H $\left(\dfrac{bc}{b+c}, \dfrac{bc}{b-c}\right)$ d) H$\left(\dfrac{b^2}{b+c}, \dfrac{c^2}{b+c}\right)$

e) H$\left(\dfrac{b^2}{b-c}, \dfrac{c^2}{b-c}\right)$ f) H$\left(\dfrac{b^2+c^2}{bc}, \dfrac{b^2-c^2}{bc}\right)$

TG - 047 Fie A şi B punctele în care dreapta $ax + (2a + 1)y + a^2 = 0$ taie axa (Ox), respectiv (Oy), (d_1) dreapta ce trece prin A şi este paralelă cu prima bisectoare a axelor; (d_2) dreapta care trece prin B şi este perpendiculară pe (d_1). Să se determine "*a*" astfel încât punctul de intersecţie dintre (d_1) şi (d_2) să fie pe dreapta de ecuaţie $x + 5y = 1$.

a) $a = \pm 2$ b) $a = \pm 1$ c) $a = 0$, $a = 1$

d) $a = 2$, $a = 3$ e) $a = \pm 3$ f) $a = -1$, $a = 3$

TG - 048 Se dau dreptele $x + y - 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ şi $x - 2y - 3 = 0$, care sunt laturile unui paralelogram. Să se scrie ecuaţiile diagonalelor.

a) $2x - y = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ b) $x - 2y - 3 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$

c) $x - 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ d) $x + 4y - 1 = 0$, $-x + 2y + 3 = 0$

e) $3x + 6y - 5 = 0$, $5x + 2y - 7 = 0$ f) $3x + 6y - 5 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$

TG - 049 Se dau punctele A(2,1) şi B(-5,-3). Să se afle punctul M pe dreapta

(d) $y = x + 4$, astfel ca $m\left(\widehat{AMB}\right) = 90°$.

a) $M_1(-1,3)$, $M_2(1,5)$ b) $M_1(-2,2)$, $M_2\left(-\dfrac{11}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ c) $M_1(-1,3)$, $M_2\left(-\dfrac{11}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

d) $M_1(1,5)$ e) $M(-3,1)$ f) $M_1(0,4)$, $M_2(-3,1)$

TG - 050 Se dau dreptele $3x - 4y + 6 = 0$ şi $4x - 3y - 9 = 0$. Să se determine paralela la a doua bisectoare a axelor de coordonate care formează între cele două drepte un segment de $5\sqrt{2}$ unități.

a) $y = -x + 10, y = -x + 20$ b) $y = -x - 20, y = -x + 20$ c) $y = -x + 50, y = -x + 20$

d) $y = -x + 50, y = -x - 20$ e) $y = -x - 10, y = -x + 30$ f) $y = -x + 10, y = -x - 30$

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
(simbol AM)

AM - 001 Determinaţi numerele reale a şi b astfel încât:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+a}-b}{x^2+x-2}=\frac{5}{18}.$$

a) $a=-3, b=-5$ b) $a=3, b=-5$ c) $a=5, b=3$
d) $a=-5, b=-3$ e) $a=2, b=1$ f) $a=-2, b=-1$

AM - 002 Să se determine parametrii a şi b reali, aşa încât:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-ax^2}-bx+2\right)=1.$$

a) $a=12, b=2$ b) $a=10, b=2$ c) $a=12, b=4$
d) $a=-10, b=2$ e) $a=8, b=6$ f) $a=6, b=10$

AM - 003 Să se calculeze: $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}}$.

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) 1 e) -1 f) 2

AM - 004 Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin relaţia

$$f(x)=\left[1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx)\right]^{1/x}$$ pentru orice $x>0$.

Să se determine $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

a) 1 b) 0 c) e^n d) $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e) $e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ f) e^{-n^2}

AM - 005 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

a) $-\dfrac{1}{56}$ b) $\dfrac{1}{56}$ c) $\dfrac{1}{48}$ d) $-\dfrac{1}{48}$ e) 0 f) 1

AM - 006 Să se determine parametrul real a astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases} a\ln(3-x), & \text{dacă } x<1 \\ \dfrac{2^x-2}{x-1}, & \text{dacă } x>1 \end{cases}$ să aibă limită în punctul $x = 1$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) ln2 f) 2ln2

AM - 007 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

a) –1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) $\dfrac{3}{2}$ f) 3

AM - 008 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{3}{4}$ d) $-\dfrac{1}{2}$ e) $-\dfrac{3}{4}$ f) 1

AM - 009 Să se determine: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) 1 e) $\dfrac{1}{2}$ f) nu există

AM - 010 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) 1 e) $\dfrac{1}{2}$ f) 2

AM - 011 Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, unde $m, n \in \mathbf{N}^*$.

a) $\dfrac{m}{n}$ b) $(-1)^m \cdot \dfrac{m}{n}$ c) $(-1)^{m-n} \cdot \dfrac{m}{n}$ d) $(-1)^{mn} \cdot \dfrac{m}{n}$ e) $\dfrac{n}{m}$ f) $(-1)^{n-m} \cdot \dfrac{n}{m}$

AM - 012 Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1}{\sin^3 x}$.

a) -1 b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$ d) e e) e^2 f) $+\infty$

AM - 013 Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}}$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) e e) $\dfrac{1}{e}$ f) $2e$

AM - 014 Se consideră şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,

unde $a_n = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x \sin nx)^{1/x^2}$. Să se calculeze: $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

a) $1-e$ b) $\dfrac{1}{1-e}$ c) e d) $e-1$ e) $\dfrac{1}{e-1}$ f) 0

AM - 015 Se consideră funcţia $f : (-k, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3ax + 2a^2}{x+k}$,
unde $a, k \in \mathbf{R}$. Să se precizeze relaţia dintre a şi k astfel încât graficul funcţiei f să admită ca asimptotă dreapta $y = x + 1$.

a) $3a + k = 0$ b) $3a + k = -1$ c) $3a + k = 1$
d) $3a + 2k = 1$ e) $3a + 2k = 0$ f) $3a + 2k = -1$

AM - 016 Fie $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se determine asimptotele lui f.

a) $x = 2, x = 3, y = 5$ b) $x = 3, x = 1, y = 6$ c) $x = 2, x = -1, y = 2$

d) $x=-2, x=1, y=1$ e) $x=3, x=4, y=5$ f) $x=\frac{1}{2}, x=2, y=-1$

AM - 017 Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\cup[4,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$.
Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul lui f.

a) $y=x$ b) $y=x-2$ c) $y=-x+2$ d) $y=-x$ e) $y=-x+1$ f) nu există

AM - 018 Fie funcția $f:\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$. Să se determine asimptotele la graficul acestei funcții.

a) $x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$ b) $x=\frac{3}{2}, y=x$ c) $x=\frac{3}{2}, y=x+\frac{1}{2}$

d) $x=\frac{3}{2}, y=0$ e) $x=-\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$ f) $x=1, y=x+1$

AM – 019 Să se determine valoarea constantei $a\in\mathbf{R}$, astfel încât funcția
$f:[0,3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{7\sin a(x-2)}{x-2}, & x\in[0,2)\\ 6x+a, & x\in[2,3]\end{cases}$ să fie continuă pe domeniul ei de definiție.

a) $a=2$; b) $a=1$; c) $a=3$; d) $a=4$; e) $a=5$; f) $a=0{,}5$.

AM - 020 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât ecuația $2mx^3-5x-12m=0$ să aibă cel puțin o rădăcină reală în intervalul (1,2).

a) $m\in(1,2)$ b) $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ c) $m\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}$

d) $m\in\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ e) $m\in\left[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$ f) $m\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

AM - 021 Fie funcțiile $f_1 : D_1 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$ şi funcțiile $f_2 : D_2 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = |x|\sqrt{x-1}$. Ştiind că D_1 şi D_2 sunt domeniile maxime de definiție ale celor două funcții, să se precizeze aceste domenii.

a) $D_1 = [1,+\infty) \cup \{0\}; D_2[1,+\infty)$
b) $D_1 = [1,+\infty) \cup \{0\}; D_2 = [1,2)$
c) $D_1 = (1,+\infty); D_2 = [1,+\infty) \cup \{0\}$
d) $D_1 = D_2 = [1,+\infty)$
e) $D_1 = [1,+\infty); D_2 = [1,+\infty) \cup \{0\}$
f) $D_1 = D_2 = [1,+\infty) \cup \{0\}$

AM - 022 Se consideră funcția $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}, \quad f(x) = (x+1)\ln x$
Să se calculeze $f'(1)$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) –1 f) –2

AM - 023 Să se calculeze derivata de ordinul unu a funcției

$$f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$$

a) $f'(x) = \dfrac{x^2+4}{2x^2}$ b) $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{2x^2}$ c) $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$
d) $f'(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2}$ e) $f'(x) = \dfrac{x^2+4}{2x}$ f) $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{2x}$

AM - 024 Care este cea mai mică pantă posibilă a unei tangente la curba $y = x^3 - 3x^2 + 5x$?

a) $-\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{5}{3}$ c) 1 d) 0 e) 2 f) -3

AM - 025 Fie funcția $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f. Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x = 0$ şi în caz afirmativ să se calculeze valoarea derivatei în acest punct.

a) $f'(0) = 1$ b) $f'(0) = -1$ c) $f'(0)$ nu există

d) $f'(0)=0$ e) $f'(0)=2$ f) $f'(0)=\frac{1}{2}$

AM - 026 Fie $f:\left[\frac{1}{e},e\right]\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\arcsin|\ln x|$. Să se determine mulțimea punctelor în care funcția este derivabilă.

a) $\left[\frac{1}{e},e\right]$ b) $\left[\frac{1}{e},1\right)$ c) $(1,e]$ d) $[1,e]$ e) $\left(\frac{1}{e},1\right)\cup(1,e)$ f) $\left[\frac{1}{e},1\right)\cup(1,e]$

AM - 027 Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x\le 2\\ ax+b, & x>2\end{cases}$, să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $a=4, b=0$ b) $a=3, b=0$ c) $a\in\mathbf{R}, b=5$

d) $a=3, b\in\mathbf{R}$ e) $a=4, b=-1$ f) $a=-1, b=4$

AM - 028 Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$, să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $a=1, b=1$ b) $a=2e, b=e$ c) $a=-2e, b=e$

d) $a=2e, b=-e$ e) $a=e, b=0$ f) $a=2, b=\frac{1}{e}$

AM - 029 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}ae^{2x}, & x\le 0\\ \sin 2x+b\cos 3x, & x>0\end{cases}$.

Să se determine constantele reale a şi b astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $a=b=1$ b) $a=1, b=2$ c) $a=b=2$

d) $a=3, b=1$ e) $a=b=3$ f) $a=1, b=-1$

AM - 030 Să se calculeze derivata funcției $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}.$$

a) $f'(x)=\frac{1}{x^4+1}$ b) $f'(x)=\frac{x}{x^3+1}$ c) $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$

d) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ e) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ f) $f'(x)=\frac{2}{x^2+1}$

AM - 031 Să se calculeze derivata funcției $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to[-1,1]$,

definită prin $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

a) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ b) $f'(x)=\sin\frac{1}{x}$ c) $f'(x)=0$

d) $f'(x)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ e) $f'(x)=\cos\frac{1}{x}$ f) $f'(x)=\frac{1}{\cos x}$

AM - 032 Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, derivabilă astfel încât $f(-x)=f(x)$ pentru orice $x\in[-1,1]$. Să se calculeze $f'(0)$.

a) $f'(0)=1$ b) $f'(0)=-1$ c) $f'(0)=\frac{1}{2}$ d) $f'(0)=-\frac{1}{2}$ e) $f'(0)=0$ f) $f'(0)=2$

AM - 033 Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$, prin $f(x)=\frac{1}{2^x}+\frac{1}{5^x}$. Să se calculeze derivata inversei funcției f în punctul $y=2$.

a) $\frac{1}{\ln 5}$ b) $\ln 5$ c) $\frac{1}{\ln 10}$ d) $\ln 10$ e) $-\frac{1}{\ln 10}$ f) $\ln 2$

AM - 034 Să se determine coeficientul unghiular al tangentei în punctul (e,e^2) la graficul funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x+x^2-1$.

a) $e-1$ b) $\frac{1-2e^2}{2}$ c) $1+2e^2$ d) $\frac{2e^2+1}{e}$ e) $\frac{2e^2-1}{2}$ f) $2e$

AM - 035 Pentru ce valoare a parametrului real t, funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$f(x)=\dfrac{tx^3}{1+x^2}$ are în punctul $x=1$ graficul tangent unei drepte paralelă cu prima bisectoare ?

a) $t=1$ b) $t=-1$ c) $t=2$ d) $t=-2$ e) $t=-3$ f) $t=0$

AM - 036 Fie $f:[-1,+\infty)\to \mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x+1}$. Să se determine abscisa x_0 a unui punct situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic să fie paralelă cu coarda ce uneşte punctele de pe grafic de abscisă $x=0$, $x=3$.

a) $x_0=\dfrac{1}{3}$ b) $x_0=\dfrac{1}{4}$ c) $x_0=-\dfrac{1}{3}$ d) $x_0=\dfrac{5}{4}$ e) $x_0=-\dfrac{2}{3}$ f) $x_0=\dfrac{4}{3}$

AM - 037 Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{-3\}\to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ şi $x_0=-3+\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă x_0.

a) $y=2x+4-2\sqrt{14}$ b) $y=2x+8+2\sqrt{14}$ c) $y=4x+8+2\sqrt{14}$
d) $y=4x+8-2\sqrt{14}$ e) $y=2x+8-2\sqrt{14}$ f) $y=x-4+2\sqrt{14}$

AM - 038 Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x}$, unde $a,b\in \mathbf{R}$. Să se determine a şi b ştiind că graficul lui f este tangent dreptei $y=-2$ în punctul $x=1$.

a) $a=4, b=-1$ b) $a=-1, b=2$ c) $a=2, b=3$
d) $a=-4, b=-1$ e) $a=-4, b=1$ f) $a=4, b=1$

AM - 039 Se consideră funcţiile $f(x)=x^2$ şi $g(x)=-x^2+4x+c$, unde $c\in \mathbf{R}$. Să se afle c astfel încât graficele lui f şi g să aibă o tangentă comună într-un punct de intersecție a curbelor.

a) $c=1$ b) $c=2$ c) $c=\dfrac{1}{2}$ d) $c=-2$ e) $c=3$ f) $c=-1$

AM - 040 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to \mathbf{R}$, $f(x)=xe^x$. Să se determine panta tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă x=-1.

a) -1 b) 0 c) 1
d) e e) -e f) 2e

AM - 041 Se consideră funcția $f(x)=\frac{x^2+px+q}{x^2+2}$. Să se determine parametrii $p,q\in\mathbf{R}$ astfel ca dreapta y=x-3 să fie tangentă graficului funcției în punctul A(1,-2).

a) p=1, q= -8 b) p=-2, q=-5 c) p=-3, q= -4
d) p=-4, q=-3 e) p=-5, q=-2 f) p=-6, q=-1

AM - 042 Să se determine punctul P de pe graficul funcției $f(x)=e^x+x$, în care tangenta la grafic trece prin origine.

a) P(0,1) b) $P(-1, e^{-1}-1)$ c) P(1, 1+e)
d) $P(2, e^2+2)$ e) $P(-2, e^{-2}-2)$ f) $P\in\varnothing$

AM - 043 Să se afle soluția inecuației $\ln\left(x^2+1\right)>x$.

a) $x\in(0,+\infty)$ b) $x\in(-\infty,1)$ c) $x\in(-\infty,0)$
d) $x\in(1,+\infty)$ e) $x\in(-1,+\infty)$ f) $x\in(-\infty,2)$

AM - 044 Să se determine valorile parametrului real m pentru care funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-mx$ este monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$.

a) $(-\infty,1]$ b) $[1,+\infty)$ c) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
d) $(-\infty,-1]$ e) $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$ f) $[-1,1]$

AM - 045 Să se determine toate soluțiile $x\in(0,+\infty)$ ale inecuației: $\ln x\le\frac{x}{e}$.

a) $(0,+\infty)$ b) $(1,e]$ c) $[e,+\infty)$ d) e e) $\left[e,e^2\right]$ f) $\left[e^2,+\infty\right)$

AM - 046 Să se afle punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=x^4-10x^2$, precizând natura lor.

a) $-\sqrt{5}=\min,\ 0=\max,\ \sqrt{5}=\min$ b) $0=\max,\ 5=\min$
c) $-\sqrt{5}=\min, \sqrt{5}=\max$ d) $0=\max, \sqrt{5}=\max$
e) $-\sqrt{5}=\max,\ 0=\min, \sqrt{5}=\min$ f) $-\sqrt{5}=\max, 0=\min,\ \sqrt{5}=\max$

AM - 047 Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=6x-x^3$ pe segmentul $[-2,3]$.

a) $f_{\min}=2, f_{\max}=4$ b) $f_{\min}=-5, f_{\max}=6$ c) $f_{\min}=-8, f_{\max}=4\sqrt{2}$

d) $f_{\min}=-2, f_{\max}=7$ e) $f_{\min}=-9, f_{\max}=4\sqrt{2}$ f) $f_{\min}=-7, f_{\max}=4$

AM - 048 Care este mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$, unde E este domeniul maxim de definiţie ?

a) $\{2\}$ b) $\{0,4\}$ c) $\varnothing$ d) $\{1\}$ e) $\{1,2\}$ f) $\{-1,5\}$

AM - 049 Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{ax+a-2}{x^2+1}$ unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât funcţia să aibă un extrem în punctul $x=1$.

a) $a=1$ b) $a=2$ c) $a=-2$ d) $a=-1$ e) $a=3$ f) $a=-3$

AM - 050 Să se determine mulţimea punctelor de inflexiune pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+5$.

a) $\{0,3\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0,2\}$ d) $\varnothing$ e) $\{1\}$ f) $\{0,1\}$

AM - 051 Se dă funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{2\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\left|ax^2+bx+c\right|}{x-2}$, unde $a>0$, $c<0$, $b\in\mathbf{R}$. Să se determine coeficienţii a, b, c astfel ca graficul funcţiei să admită asimptotă dreapta $y=x+3$, iar $f(0)=-1$.

a) $a=2, b=1, c=-3$ b) $a=1, b=2, c=3$ c) $a=1, b=2, c=-3$

d) $a=1, b=1, c=2$ e) $a=1, b=1, c=-2$ f) $a=1, b=-1, c=2$

AM - 052 Să se determine valoarea constantei $a \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{\sin x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}, & \text{dacă } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ a, & \text{dacă } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbf{R}$.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) 1 c) 0 d) –1 e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{2}$

AM - 053 Fie funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f. Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x = 0$ şi în caz afirmativ să se calculeze valoarea derivatei în acest punct.

a) $f'(0) = 1$ b) $f'(0) = -1$ c) $f'(0)$ nu există
d) $f'(0) = 0$ e) $f'(0) = 2$ f) $f'(0) = \frac{1}{2}$

AM - 054 Fie α un număr real şi $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ funcția dată de:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ pentru care f este de două ori derivabilă în $x = 0$.

a) $\alpha = 2$ b) $\alpha = 1$ c) $\alpha > 1$ d) $\alpha > 2$ e) $\alpha > 3$ f) $\alpha \leq 3$

AM - 055 Fie funcția $f(x) = 2\arcsin \frac{x-2}{2} - \sqrt{4x - x^2}$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$ b) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ c) $y=3+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$

d) $y=(x-1)-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}$ e) $y=-(x-1)-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ f) $y=x+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}$

AM - 056 Folosind intervalele de monotonie ale funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, să se precizeze care din următoarele inegalități este adevărată.

a) $(\sqrt{3})^5>5^{\sqrt{3}}$ b) $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$ c) $2^{\sqrt{3}}>3^{\sqrt{2}}$

d) $8^{\sqrt{10}}<10^{\sqrt{8}}$ e) $10^{\sqrt{11}}<11^{\sqrt{10}}$ f) $2^{\sqrt{5}}>5^{\sqrt{2}}$

AM - 057 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-x+a}}$, unde $a\in\mathbf{R}$. Să se determine parametrul *a* astfel încât funcția să admită un extrem cu valoarea $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

a) $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $a=0$ şi $a=1$ c) $a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $a=1$ e) $a=5$ f) $a=-2$

AM - 058 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\frac{x^2-ax}{\sqrt{x^2+1}}$ unde $a\in\mathbf{R}$. Să se determine *a* pentru care funcția f admite un punct de extrem situat la distanța 2 de axa Oy.

a) $a=-11, a=12$ b) $a=-12, a=11$ c) $a=-12, a=12$

d) $a=-4, a=3$ e) $a=1, a=-2$ f) $a=4, a=7$

AM - 059 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\le 0\\ e^x, & x>0\end{cases}$. Precizați care din următoarele funcții reprezintă o primitivă a funcției f:

$$F_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x,\ x\le 0\\ e^x,\ x>0\end{cases}\qquad F_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+c, x\le 0\\ e^x+c,\ x>0\end{cases}$$

$$F_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x,\ x\le 0\\ e^x-1,\ x>0\end{cases}\qquad F_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x,\ x\le 0\\ e^x+1,\ x>0\end{cases}$$

a) toate b) nici una c) F_1

d) F_2 e) F_3 f) F_4

AM - 060 Se consideră funcția $f:(0,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-9x-27}{x^2-2x+1}$.

Să se găsească numerele reale *m*, *n* și *p* astfel încât funcția

$F:(0,1)\to\mathbf{R}$, $F(x)=\dfrac{mx^3+nx^2+px}{x-1}$ să fie primitivă pentru f.

a) $m=1, n=\dfrac{9}{2},\ p=27$ b) $m=\dfrac{1}{2}, n=-\dfrac{9}{2}, p=27$ c) $m=\dfrac{1}{2}, n=\dfrac{9}{2}, p=27$

d) $m=-\dfrac{1}{2}, n=\dfrac{9}{2}, p=27$ e) $m=1, n=27,\ p=9$ f) $m=2, n=3,\ p=\dfrac{1}{2}$

AM – 061 Calculați integrala nedefinită

$\int\dfrac{x+1}{x}dx$ pentru orice $x\in(a,b)$, unde $0\notin(a,b)$.

a) $1+\ln x+C$ b) $x-\dfrac{1}{x^2}+C$ c) $x+\dfrac{1}{x^2}+C$

d) $x+\ln|x|+C$ e) $\ln|x+1|+C$ f) $\dfrac{x+1}{x}+C$

AM – 062 Calculați integrala:

$$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}.$$

a) $e^{-1}-e^{-\sqrt{2}}$ b) $e^{-\sqrt{2}}-e^{-1}$ c) $2\left(e^{-1}-e^{-\sqrt{2}}\right)$

d) $2\left(e^{-\sqrt{2}}-e^{-1}\right)$ e) $\frac{1}{2}\left(e^{-1}-e^{-\sqrt{2}}\right)$ f) $\left(e^{-\sqrt{2}}-e^{-1}\right)$

AM – 063 Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^{2x}+2}dx$$

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$

d) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ e) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ f) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg2\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}2$

AM – 064 Să se calculeze $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$.

a) $\arcsin e-\arcsin e^2$ b) $\arcsin e^{-1}-\arcsin e^{-2}$ c) $\arcsin e^2-\arcsin e$

d) $\arcsin e^{-2}-\arcsin e^{-1}$ e) $\frac{1}{2}\left(\arcsin e^{-2}-\arcsin e^{-1}\right)$ f) $\frac{1}{2}\left(\arcsin e-\arcsin e^2\right)$

AM – 065 Să se calculeze: $\int\limits_0^1 \left(x^2-2x-1\right)e^x dx$.

a) $e-1$ b) -3 c) $3(e-1)$ d) $3(1-e)$ e) $3e$ f) $-3e$

AM – 066 Să se calculeze primitivele funcției

$$f:(1,2)\cup(2,\infty)\to\mathbf{R},\quad f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-3x+2}.$$

a) $2\ln\left(x^2-3x+2\right)+C$ b) $\ln\frac{x-2}{x-1}+C$ c) $\ln\frac{x-1}{x-2}+C$

d) $\begin{cases} x+3\ln\dfrac{(x-2)^2}{x-1}+C_1 \\ x+3\ln\dfrac{(x-2)^2}{x-1}+C_2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2\ln\dfrac{x-2}{x-1}+C_1 \\ x+2\ln\dfrac{x-2}{x-1}+C_2 \end{cases}$ f) $x+\ln\dfrac{(x-2)^2}{x-1}+C$

AM – 067 Să se determine mulțimea primitivelor următoarei funcții trigonometrice $f:(0,\pi)\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$

a) $\ln|\text{ctg } x|+C$ b) $\dfrac{1}{\cos x}+C$ c) $\ln|\text{tg}x|+C$

d) $\ln\left|\text{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$ e) $\ln\left|\text{ctg}\dfrac{x}{2}\right|+C$ f) $\dfrac{1}{\ln(\cos x)}+C$

AM - 068 Să se calculeze $I=\int\dfrac{sinx}{sinx+cosx}dx$, unde $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

a) $I=\ln\ \text{tg}\dfrac{x}{2}+C$ b) $I=\dfrac{1}{2}\left(x^2-\ln|\sin x-\cos x|\right)+C$

c) $I=\dfrac{1}{2}\text{arctg}\,x+C$ d) $I=\dfrac{1}{2}\left(x-\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$

e) $I=\dfrac{1}{2}\left(\ln|\sin x-\cos x|\right)+\text{arctg}\,x+C$ f) $I=\dfrac{1}{2}\left(x+\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$

AM - 069 Să se stabilească o relație de recurență pentru integralele:

$$I_n,\ n\in\mathbf{N},\ n\geq 2,\ I_n=\int_0^{1/2}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

a) $I_n=-\dfrac{\sqrt{3}}{2^n}+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$ b) $I_n=-\dfrac{\sqrt{3}}{2^n}+(n-1)(I_n-I_{n-2})$

c) $I_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2^n}-(n+1)(I_n-I_{n-1})$ d) $I_n=(n-1)I_{n-1}+I_{n-2}$

e) $I_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2^n} + n(I_{n-1} - I_{n-2})$ f) $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

AM – 070 Să se stabilească o relație de recurență pentru integralele I_n, $n \in \mathbf{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx$$

a) $I_n = \dfrac{n+1}{n} I_{n-2}, \ n \geq 2;$ b) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$, $n \geq 2$

c) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}, \ n \geq 2;$ d) $I_n = \dfrac{n-1}{2} I_{n-2}$, $n \geq 2$

e) $I_n = \dfrac{n-1}{2} I_{n-1}, \ n \geq 2;$ f) $I_n = \dfrac{n+1}{2} I_{n-2}$, $n \geq 2$

AM - 071 Știind că $\int_1^5 P(x)dx = -1$ și $\int_3^5 P(x)dx = 3$, să se calculeze

$$\int_3^1 \left[2P(t) + P(2t-1)\right]dt \, .$$

a) 4 b) 9 c) $\dfrac{8}{3}$ d) $\dfrac{19}{2}$ e) $\dfrac{17}{2}$ f) Nu are sens o astfel de integrală

AM - 072 Se consideră funcția $f : [0,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1-[x]}{2x-[x]+1}$.

Să se calculeze integrala $I = \int\limits_0^2 f(x)dx$

a) $I = \dfrac{1}{2}\ln 3$ b) $I = 1 - \ln 6$ c) $I = 1 - \dfrac{1}{4}\ln 12$

d) $I = \dfrac{1}{2} - \ln 12$ e) $I = \dfrac{1}{4}\ln 12 - 1$ f) $I = \dfrac{1}{4}\ln 12$

AM – 073 Să se calculeze $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx.$

a) 4 b) $\dfrac{15}{4}$ c) 3 d) $\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{17}{4}$ f) 2

AM – 074 Să se calculeze: $\int_0^3 (x+2)dx$.

a) 3 b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{21}{2}$ e) $\frac{9}{2}$ f) 6

AM – 075 Să se calculeze $I = \int_0^2 \left(x^{\frac{3}{2}} + 1 \right) dx$

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 5 d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{5}{7}$

AM - 076 Fie funcția $f:[1,3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Să se determine $c \in (1,3)$ astfel încât $\int_1^3 f(x)dx = 2f(c)$.

a) $c = \frac{1}{3}$ b) $c = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$ c) $c = \sqrt{\frac{13}{3}}$ d) $c = \sqrt{\frac{28}{3}}$ e) $c = \pm\sqrt{\frac{28}{3}}$ f) $c = 2$

AM - 077 Să se calculeze $\int_1^e \frac{\ln x}{x\left(\ln^2 x + 1\right)} dx$

a) 1 b) $\frac{\pi}{4}$ c) e-1 d) $\ln\sqrt{2}$ e) ln2 f) $\frac{\pi}{2}$

AM - 078 Calculați valoarea integralei: $I = \int_{-2}^{2} \left(|x-1| + |x+1|\right) dx$.

a) 8 b) 5 c) 10 d) 9 e) 7 f) 18

AM - 079 Să se calculeze integrala: $I = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} dx$.

a) $I = \frac{3}{2} - 4\ln 2$ b) $I = -\frac{1}{2} - 4\ln 2$ c) $I = -\frac{3}{2} + 4\ln 2$

d) $I=\frac{3}{2}+4\ln 2$ e) $I=-\frac{1}{2}+4\ln 2$ f) $I=1+3\ln 2$

AM - 080 Să se calculeze : $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$.

a) $\ln\sqrt{2}+\text{arctg}2$ b) $\ln\sqrt[4]{2}+\frac{\pi}{8}$ c) $\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}$

d) $\ln 2$ e) $\frac{\pi}{8}$ f) $\ln\sqrt[3]{2}+\pi$

AM - 081 Să se calculeze : $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^{10}+1)}$.

a) $\ln\frac{3}{2}$ b) $\ln\frac{4032}{3107}$ c) $\ln\frac{2100}{103}$ d) $\ln\frac{e}{2}$ e) $\frac{1}{10}\ln\frac{2048}{1025}$ f) $\ln\frac{140}{343}$

AM - 082 Care este valoarea integralei : $\int_{-9}^{9} \frac{x^5}{x^8+1}dx$?

a) $2\ln(9^8+1)$ b) arctg 2 c) 1 d) 0 e) -1 f) $\frac{1}{8}$

AM - 083 Să se calculeze valoarea integralei: $I=\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$.

a) $I=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ b) $I=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2}$ c) $I=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

d) $I=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$ e) $I=2\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$ f) $I=2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-2\right)$

AM - 084 Să se calculeze integrala : $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

a) $2(\pi+1)$ b) $2(\pi-1)$ c) 2π d) π e) $\frac{\pi}{2}$ f) 3π

AM - 085 Să se calculeze : $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}dx$.

a) 5 b) 2 c) $\frac{3}{2}$ d) 3 e) $\frac{5}{2}$ f) 1

AM - 086 Să se calculeze: $I=\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\left|\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right|}$.

a) $I=1$ b) $I=\frac{2}{3}$ c) $I=0$ d) $I=-1$ e) $I=\frac{\pi}{2}$ f) $I=-\frac{\pi}{2}$

AM - 087 Să se calculeze integrala definită $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$

a) $\frac{1}{3}\ln 2$ b) $\frac{1}{2}\ln 3$ c) ln 4 d) 3ln2 e) 2ln3 f) ln 8

AM - 088 Determinați valoarea integralei: $I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{4\cos^2 x+\sin^2 x}dx$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) ln 2 d) $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$

AM - 089 Să se calculeze $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin 3xdx$.

a) $I=\frac{1}{13}\left(3-2e^{\pi}\right)$ b) $I=\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}e^{\pi}-3\right)$ c) $I=\frac{1}{5}\left(3+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

d) $I=\frac{1}{5}\left(3-\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ e) $I=\frac{1}{5}\left(-3+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ f) $I=\frac{1}{13}\left(3+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

AM - 090 Să se calculeze $\int_0^{\pi/2} \max\{\sin x, \cos x\}dx$.

a) $\sqrt{2}$ b) 0 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) -1

AM - 091 Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$, dacă $a_n = \int_1^n \frac{x-1}{x+1}dx$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

a) 2 b) 3 c) 1 d) -1 e) 5 f) 4

AM - 092 Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_1^n (x-1)e^{-x}dx$.

a) 0 b) e^2 c) e - 1 d) $\frac{1}{e}$ e) $\frac{1}{e}-1$ f) 1

AM - 093 Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=\int_0^x e^t \ln(1-t+t^2)dt$. Determinați punctele de extrem local ale funcției F.

a) $x_1=-1$ b) $x_1=e$ c) $x_1=0, x_2=1$

d) $x_1=\frac{1}{e}$ e) nu are puncte de extrem local f) $x_1=2, x_2=5$

AM - 094 Să se calculeze aria domeniului marginit de graficul funcției $f(x)=\frac{1}{x+1}$ cu axa Ox şi dreptele x=0, x=1.

a) ln2 b) $\frac{1}{2}$ c) π d) 1 e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{\pi}{3}$

AM - 095 Să se calculeze aria figurii plane cuprinsă între parabola $y=x^2$ şi dreapta $x+y=2$.

a) $\frac{9}{2}$ b) 3 c) 2 d) $\frac{8}{3}$ e) 7 f) 8

AM - 096 Calculați aria domeniului mărginit de curbele : $y = 2x - x^2$ şi $y = -x$.

a) 13,5 b) 4,5 c) 13,2 d) 6,5 e) $\frac{1}{2}$ f) 3,5

AM - 097 Fie $f : (-1,+\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$. Care este aria porțiunii plane cuprinsă între graficul funcției, dreptele $x = 0$, $x = 1$ şi axa Ox ?

a) 0 b) ln 2 c) $\ln\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}$ e) $3\ln 2 - 1$ f) $\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{3}$

AM - 098 Care este aria suprafeței cuprinsă între parabolele de ecuații :

$$y^2 = x \text{ şi } x^2 = 8y \ ?$$

a) 8 b) $\frac{16}{3}$ c) $\frac{8}{3}$ d) 1 e) $\frac{1}{24}$ f) $\frac{1}{4}$

AM – 099 Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f(x) = \sqrt{8x}$, $x \in [0,4]$.

a) 64 π b) 66 π c) 20 π d) 24 π e) 4 π f) 8π

AM - 100 Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$, $x \in [4,10]$.

a) 216 π b) 200 π c) 400 π d) 20 π e) 10 π f) 60π

ANEXE

Subiecte date la admitere în anii 2009 şi 2010,

cu soluţii complete

AC + ETC
UNIVERSITATEA „POLITEHNICA" DIN TIMIŞOARA
SESIUNEA: IULIE, DATA 20.07.2009
PROBA: MATEMATICĂ

A

1. (8 p) Să se determine domeniul de continuitate al funcției

$$f:[-1,1]\to[-2,2],\ f(x)=\begin{cases}-3x-2, & x\in[-1,0]\\ x^2+1, & x\in(0,1]\end{cases}$$

a) $[-1,1]\setminus\{0\}$; b) $[-1,1]$; c) $(-1,1)$; d) $(-1,1)\setminus\{0\}$; e) $(-1,1]\setminus\{0\}$.

2. (9 p) Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația $e^x = mx^2$ are o singură rădăcină reală.

a) $m\in(-\infty,0]$; b) $m\in\left(0,\dfrac{e^2}{4}\right)$; c) $m\in\left(\dfrac{e^2}{8},\dfrac{e^2}{3}\right)$; d) $m\in\left(\dfrac{e^2}{4},+\infty\right)$; e) $m=\dfrac{e^2}{4}$.

3. (10 p) Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^5+2^5+3^5+...+n^5}{n^6}$.

a) $L=\dfrac{1}{5}$; b) $L=\dfrac{1}{6}$; c) $L=1$; d) $L=\dfrac{1}{4}$; e) $L=\dfrac{2}{3}$;

4. (8 p) Să se calculeze volumul corpului determinat prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f(x)=\sqrt{x^2-1},\ x\in[1,2]$.

a) $\dfrac{\pi}{2}$; b) $\dfrac{2\pi}{3}$; c) $\dfrac{4\pi}{3}$ d) $\dfrac{8\pi}{3}$ e) 1.

5. (10 p) Se consideră inelul $(\mathbf{R},\perp,\top)$, unde legile de compoziție se definesc prin

$x\perp y = x+y-2$

$x\top y = xy-2x-2y+6$

Determinați elementele neutre θ (față de $\perp$) şi e (față de $\top$):

a) $\theta=1, e=3$; b) $\theta=2, e=1$; c) $\theta=1, e=1$; d) $\theta=2, e=3$; e) $\theta=0, e=1$;

6. (7 p) Determinați mulțimea tuturor soluțiilor ecuației: $\cos^4 x-\sin^4 x=1$.

a) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{3} \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$; b) $x \in \left\{ k\pi \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$; c) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$;

d) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{4} \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$; e) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{6} \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$;

7. (7 p) Determinați coordonatele centrului şi raza cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

a) $C(1,-2)$, $r = \sqrt{6}$; b) $C(-1,2)$, $r = \sqrt{3}$; c) $C(-1,-1)$, $r = \sqrt{5}$;
d) $C(1,2)$, $r = \sqrt{5}$; e) $C(-2,-2)$, $r = \sqrt{3}$;

8. (7 p) Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to 12} \frac{3 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 144}$.

a) 12; b) $\frac{1}{144}$; c) $-\frac{1}{288}$; d) $\frac{1}{288}$ e) $-\frac{1}{144}$

9. (9 p) Să se afle cea mai mică valoare a funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m^2$, când parametrul real m parcurge toate valorile posibile.

a) -1; b) 0; c) 1; d) $-\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{8}$;

10. (8 p) Să se rezolve inecuația: $\log_3 |x| < 1$.

a) $x \in (0, \infty)$ b) $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \setminus \{0\}$ c) $x \in (-3,3) \setminus \{0\}$;
d) $x \in (-2,4) \setminus \{0\}$ e) $x \in (3, \infty)$

11. (9 p) Să se rezolve ecuația matricială $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, unde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 0 & 2\end{pmatrix}$;   e) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

12. (8 p) Să se rezolve sistemul $\begin{cases}2x+3y+z=8\\ x+2y+3z=7\\ 3x+y+2z=9\end{cases}$

a) $x=1,\ y=2,\ z=3$ b) $x=2,\ y=1,\ z=1$ c) $x=3,\ y=2,\ z=2$
d) $x=1,\ y=1,\ z=4$ e) $x=1,\ y=3,\ z=2$

2009 SOLUȚII

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-2=f(0)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$.

Deci, f nu este continuă în punctul $x=0$.

Răspuns corect: a).

2. A determina m real pentru ca ecuația să aibă o singură rădăcină reală este echivalent cu a determina $m\neq 0$ pentru ca ecuația

$$\frac{e^x}{x^2}-m=0$$

să aibă o singură rădăcină reală. Utilizăm șirul lui Rolle. Dacă $f(x)=\frac{e^x}{x^2}-m$, atunci $f'(x)=\frac{e^x x^2-e^x 2x}{x^4}$. Șirul lui Rolle este:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-m$	$\frac{e^2}{4}-m$	$+\infty$

Se impune: $\begin{cases} -m<0 \\ \dfrac{e^2}{4}-m>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m\in\left(0,\dfrac{e^2}{4}\right)$

Răspuns corect: b).

3. Utilizăm metoda sumelor Riemann:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^5}{n^6}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{6}$$

Răspuns corect: b).

4. $V=\pi\int_1^2\left(f(x)\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(x^2-1\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\frac{4\pi}{3}.$

Răspuns corect: c).

5. $x\perp\theta=\theta\perp x=x \Leftrightarrow x+\theta-2=x \Leftrightarrow \theta=2;$

$x\top e=e\top x=x \Leftrightarrow xe-2x-2e+6=x \Leftrightarrow (e-3)x-2e+6=0.$

Această relație are loc pentru orice $x\in\mathbf{R}$ dacă

$$\begin{cases} e-3=0 \\ -2e+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow e=3.$$

Răspuns corect: d).

6. Ecuația este echivalentă cu: $\left(\cos^2x-\sin^2x\right)\left(\cos^2x+\sin^2x\right)=1$,

adică: $\cos 2x=1$. Soluția generală:

$$2x=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Răspuns corect: b).

7. Ecuația cercului este: $(x-1)^2-1+(y-2)^2-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2-5=0.$

Răspuns corect: d).

8. Amplificăm cu conjugatul numărătorului şi limita devine:

$$\lim_{x\to 12}\frac{\left(3-\sqrt{x-3}\right)\left(3+\sqrt{x-3}\right)}{(x-12)(x+12)\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 12}\frac{-1}{(x+12)\left(3+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{144}$$

Răspuns corect: e).

9. $f(x)=(x-1)^2+m^2-1\geq -1$.

Răspuns corect: a).

10. Se impune $|x|>0 \Leftrightarrow x\neq 0$. Inecuația este echivalentă cu:

$\log_3|x|<\log_3 3 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow x\in(-3,3)$.

Răspuns corect. c).

11. Dacă $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, ecuația dată este echivalentă cu sistemul:

$x+z=4, \quad y+t=2$

$x+2z=2, \quad y+2t=4$, deci $X=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: e).

12. Determinantul sistemului este diferit de zero, deci sistemul este compatibil determinat.
Rezolvând sistemul (Cramer, metoda substituției, etc.), se obține:

$$x=2,\ y=1,\ z=1$$

Răspuns corect: b).

AC + ETC
UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” DIN TIMIŞOARA
SESIUNEA: IULIE, DATA 19.07.2010 **A**
PROBA: MATEMATICĂ

1. (7 p) Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=6x-x^3$, pe segmentul [-2, 3].

a) $f_{\min}=2, f_{\max}=4$; b) $f_{\min}=-5, f_{\max}=6$; c) $f_{\min}=-8, f_{\max}=4\sqrt{2}$;
d) $f_{\min}=-2, f_{\max}=7$; e) $f_{\min}=-9, f_{\max}=4\sqrt{2}$;

2. (9 p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real a pentru care ecuația $x^3-3x^2+a=0$ are toate rădăcinile reale şi distincte.

a) $(0,4)$; b) $(-\infty,0)$; c) $[0,4]$; d) $[4,\infty)$ e) $(-4,0)$.

3. (8 p) Fiind dată ecuația $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$, cu rădăcinile x_1 şi x_2, să se calculeze $x_1^2+x_2^2$.

a) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$; b) $\frac{b^2-ac}{a^2}$; c) $\frac{b^2-4ac}{a^2}$; d) $\frac{-b^2+4ac}{a^2}$; e) $\frac{-b^2+ac}{a^2}$;

4. (7 p) Să se rezolve ecuația $z^2=3+4i$.

a) $2-i, 2+i$; b) $2+i, -2-i$; c) $2+i, -2+i$; d) $2-i, -2+i$; e) $1+i, 2+i$;

5. (8 p) Să se afle coordonatele vârfurilor unui triunghi cunoscând mijloacele laturilor $P(3,-1), Q(1,7), R(-4,3)$.

a) $(-1,-4),(5,2),(-3,12)$; b) $(-2,3),(8,-5),(-6,19)$ c) $(-2,-5),(8,3),(-6,11)$

d) $(-2,-5),(4,19),(-12,13)$ e) $(2,-3),(-10,9),(0,17)$

6. (8 p) Să se determine parametrul real a astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases} a\ln(3-x), \text{ dacă } x<1 \\ \dfrac{2^x-2}{x-1}, \text{ dacă } x>1 \end{cases}$, să aibă limită în punctul $x=1$.

a) 0; b) 1; c) 2; d) $\frac{1}{2}$; e) $\ln 2$.

7. (10 p) Să se calculeze $\det\left(\mathbf{A}^{2010}\right)$, unde $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) 2010; b) – 2010; c) 1; d) -1; e) 0.

8. (9 p) Pentru ce valori ale lui m sistemul $\begin{cases} 2x+my+z=0 \\ 2x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

admite şi soluţii diferite de soluţia banală?

a) $m=0$; b) $m\neq 0$; c) $m=-1$; d) $m\neq -1$; e) $m\in \mathbf{R}$.

9. (8 p) Să se calculeze integrala $I=\int_1^2 \frac{1+x^2}{x}dx$.

a) $\ln 2-\frac{1}{2}$; b) $\ln 2+\frac{1}{2}$; c) $\ln 2+\frac{3}{2}$; d) $\ln 2+\frac{1}{2}$ e) $2\ln 2-\frac{1}{2}$

10. (10 p) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei $f:[0,1]\to \mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[4]{x(1-x)}$, în jurul axei Ox.

a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) $\frac{\pi^2}{4}$ c) $\frac{\pi^2}{8}$ d) π e) $\pi^2\sqrt{2}$

11. (8 p) Pe **R** se defineşte legea de compoziție „*” prin $x * y = axy - x - y + 2$, unde $a \in \mathbf{R}$. Pentru ce valori ale lui a legea considerată admite element neutru?

a) $a = -1$; b) $a = \frac{1}{2}$; c) $a = 0$; d) $a = 1$; e) $a = -\frac{1}{2}$

12. (8 p) Care sunt soluțiile ecuației $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$ din intervalul $[0, 2\pi]$?

a) $\varnothing$; b) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$; c) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$; d) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right\}$; e) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$

2010 SOLUȚII

1. Tabelul de variație al funcției este

x	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		3
f'		$-$	0		$+$		0	$-$	
F	-4	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$		$\nearrow$		$4\sqrt{2}$	$\searrow$	-9
	Max		Min				Max		Min

$f'(x) = 6 - 3x^2$

$6 - 3x^2 = 0$

$x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2}$

$f_{\min} = -9 \quad f_{\max} = 4\sqrt{2}$

Răspuns corect e).

2. Construim Şirul lui Rolle pentru $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$

$f'(x) = 3x^3 - 6x = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

$-\infty$	0	2	∞
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$f(0)=a$	$f(2)=a-4$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
$-$	$+$	$-$	$+$

Pentru ca toate rădăcinile să fie reale şi distincte trebuie ca $\begin{cases} f(0)>0 \\ f(2)<0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a>0 \\ a-4<0 \end{cases}$ deci $a\in(0,4)$

Răspuns corect: a).

3. Relațiile lui Vieta pentru ecuația de gradul II sunt

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \qquad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

Răspuns corect: a).

4. Căutăm $Z=x+iy$. Avem $(x+iy)^2=3+4i$ sau echivalent

$$x^2-y^2+2xyi=3+4i; \qquad \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{cases}.$$

$x^2-\dfrac{4}{x^2}=3$ sau $x^4-3x^2-4=0$ Notăm $t=x^2$

$t^2-3t-4=0$ $\qquad t_1=-1$ (nu convine)

$t_2=-4$ $\qquad x^2=4$ $\qquad x_1=2$

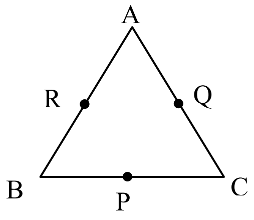
$x_2=-2$

Revenind $y_1=\dfrac{2}{x_1}=1$ $\qquad y_2=\dfrac{2}{x_2}=-1$

În final $z_1=2+i$ şi $z_2=-2-i$

Răspuns corect: b).

5. Căutăm vârfurile triunghiului ABC de forma $A(x_1, y_1) : B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$. Avem



$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 3; \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = -4; \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = 1;$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = -1; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = 3; \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 7;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -8 \\ x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} y_1 + y_2 = 6 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 14 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea sistemelor, adunăm ecuațiile fiecărui sistem şi obținem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ şi $y_1 + y_2 + y_3 = 9$. Scădem apoi din aceste ecuații pe rând fiecare acuație a sistemului. Obținem $x_1 = -6, x_2 = -2, x_3 = 8$, respectiv $y_1 = 11, y_2 = -5, x_3 = 3$.

Aşadar $\mathrm{A}(-6,11), \mathrm{B}(-2,-5), \mathrm{C}(8,3)$

Răspuns corect: c).

6. $l_s = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ z<1}} a \ln(3 - x) = a \ln 2$

$$l_d = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{2^x - 2}{x - 1} \overset{l'H}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>0}} 2^x \ln 2 = 2 \ln 2$$

Pentru a exista limita trebuie ca $l_s = l_d$ adică $a \ln 2 = 2 \ln 2$

Rezultă $a = 2$.

Răspuns corect: c).

7. Matrici A i se asociază numărul complex $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

În baza acestui izomorfism avem corespondența $\mathrm{A}^{2010} \leftrightarrow \mathrm{Z}^{2010}$

Forma trigonometrică a lui z, este $z = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$

$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \qquad tg\varphi = \sqrt{3} \qquad \varphi = \frac{\pi}{3} \qquad z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$

$$Z^{2010} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 2010\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 2010\right) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 + i0$$

Deci $A^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\left[A^{2010}\right] = 1$

Răspuns corect: c).

8. Trebuie ca determinantul sistemului să fie nul

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -4m - 4 = 0,\ m = -1$$

Răspuns corect: c).

9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+x^2}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^2 x dx = \ln|x|\Big|_1^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \ln 2 + 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{3}{2}$

Răspuns corect: a).

10. $\displaystyle V = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$

Efectuăm schimbarea de variabile $x = \sin^2 t \qquad dx = 2\sin t\cos t dt$

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t\left(1-\sin^2 t\right)}\cdot 2\sin t\cos t dt = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t\cdot\cos t|\sin t\cdot\cos t dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = 2\pi\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}\frac{\sin 4t}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

Răspuns corect. c).

11. Trebuie să existe $e \in \mathbf{R}$ astfel ca $x * e = x, \forall x \in \mathbf{R}$ sau echivalent $axe - x - e + 2 = x, \forall x \in \mathbf{R}$. În final identitatea $(ae-2)x - e + 2 = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ implică $e = 2$ şi $ae - 2 = 0$

Deci $a = 1$

Răspuns corect: d).

12. Ecuația este echivalentă cu $2\sin x \cos x = 1$

sau $\sin 2x = 1$ cu soluția generală $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ sau

$$x \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}_{k \in \mathbf{Z}} \cap [0, 2\pi] = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$$

Răspuns corect: b).

ARHITECTURĂ
UNIVERSITATEA „POLITEHNICA" DIN TIMIŞOARA
<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 20.07.2009
<u>PROBA 1</u>: MATEMATICĂ

A

1. (8 p) Fie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea **X** astfel ca $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. (9 p) Fie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\mathbf{A}^{2009}$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2009 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 4018 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2^{2009} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2009^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. (8 p) Se dă matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$. Să se determine parametrul real a pentru care rangul matricei este egal cu 2.

a) $a=-2$; b) $a=-1$; c) $a=1$; d) $a=2$; e) $a=3$.

4. (10 p) Care sunt soluțiile ecuației $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 3 & 5 & 2-x \end{vmatrix} = 0$?

a) $x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3}, x_3=7$; b) $x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}, x_3=6$;
c) $x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}, x_3=8$; d) $x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3}, x_3=8$;
e) $x_1=6, x_2=7, x_3=8$.

5. (7 p) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x+3y+z=8 \\ x+2y+3z=7 \\ 3x+y+2z=9 \end{cases}$.

a) $x=1, y=2, z=3$; b) $x=2, y=1, z=1$; c) $x=3, y=2, z=2$;
d) $x=1, y=1, z=4$; e) $x=1, y=3, z=2$.

6. (8 p) Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 12} \dfrac{3-\sqrt{x-3}}{x^2-144}$.

a) $-\dfrac{1}{144}$; b) $-\dfrac{1}{56}$; c) $-\dfrac{1}{72}$; d) $\dfrac{1}{72}$; e) -4.

7. (8 p) Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\cup[6,+\infty)\to \mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$.
Să se determine asimtotele la graficul lui *f*.

a) $y=x-6$ și $y=-x+6$; b) $y=x-3$; c) $y=-x+3$;
d) $y=x-6$ e) $y=x-3$ și $y=-x+3$.

8. (7 p) Fiind dată funcția $f:[-1,1]\to[-2,2],\ f(x)=\begin{cases}-3x-2, & x\in[-1,0]\\ x^2+1, & x\in(0,1]\end{cases}$,

Să se precizeze mulțimea punctelor sale de continuitate.

a) $(-1,0)\cup(0,1)$; b) $[-1,1]$; c) $[-1,1]\setminus\{0\}$ d) $\{0\}$ e) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$

9. (9 p) Pentru ce valori ale parametrilor reali *a* şi *b* funcția

$f:(0,+\infty)\to R,\ f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\in(0,1]\\ ax^2+bx+1, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ este derivabilă pe $(0,+\infty)$?

a) $a=1, b=-2$; b) $a=0, b=-1$; c) $a=2, b=-3$;
d) $a=0, b=1$; e) $a=1, b=-1$.

10. (10 p) Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-ax+b}{x}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$.

Să se determine *a* şi *b*, ştiind că graficul lui *f* este tangent dreptei $y=-3$ în punctul $x=1$.

a) $a=6, b=2$; b) $a=1, b=-3$; c) $a=2, b=-2$;
d) $a=5, b=1$; e) $a=3, b=-1$.

11. (8 p) Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f:(-\infty,-1]\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=x^4-8x^2+4$.

a) $\{-2;0;2\}$; b) $\{-2\}$ c) $\{-2;-1\}$; d) $\{-2;2\}$; e) $\{0;2\}$.

12. (8 p) Să se determine valorile parametrului real *m* pentru care ecuația $x^3-3x+m+1=0$ are toate rădăcinile reale şi distincte.

a) $m\in[-3,1]$; b) $m\in(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$; c) $m\in\{-3,1\}$;
d) $m\in(-1,3)$; e) $m\in(-3,1)$.

2009 – ARHITECTURĂ SOLUȚII

1. Dacă

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

ecuația dată este echivalentă cu sistemul:

$x + z = 4, \quad y + t = 2$

$x + 2z = 2, \quad y + 2t = 4,$ deci $X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$

Răspuns corect a).

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Presupunem: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultă: $A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 + a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Deci $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a_{n+1} = a_n + 2$. Şirul (a_n) este o progresie aritmetică cu rația 2 şi primul termen $a_1 = 2$. Deci,

$$a_{2009} = 2 + 2 \cdot 2008 = 4018.$$

Răspuns corect: b).

3. Avem măcar un determinant de ordinul 2 diferit de zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 \neq 0.$$

Pentru ca rangul matricii să fie chiar 2, trebuie ca determinantul de ordinul trei să fie zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & a-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(a-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 3.$$

Răspuns corect: e).

4. Adunând toate liniile la prima, ecuația dată este echivalentă cu:

$$\begin{vmatrix} 8-x & 8-x & 8-x \\ 1 & 2-x & 2 \\ 3 & 5 & 2-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (8-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 3 & 5 & 2-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 3 & 2 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (8-x)\left(-1+x^2-2\right) = 0 .$$

Răspuns corect: d).

5. Determinantul sistemului este diferit de zero, deci avem soluție unică. Rezolvând sistemul (Cramer, metoda substituției, etc.), se obține: $x = 2,\ y = 1,\ z = 1$.

Răspuns corect: b).

6. Amplificăm cu conjugatul numărătorului şi limita devine:

$$\lim_{x\to 12} \frac{\left(3-\sqrt{x-3}\right)\left(3+\sqrt{x-3}\right)}{(x-12)(x+12)\left(3+\sqrt{x-3}\right)} = \lim_{x\to 12} \frac{-1}{(x+12)\left(3+\sqrt{x-3}\right)} = -\frac{1}{144} .$$

Răspuns corect: a).

7. La $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-6x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-bx}{x^2}} = 1;$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-6x}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{\sqrt{x^2-6x}+x} = -3$$

deci la $+\infty$ asimptota este: $y = x-3$.

La $-\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-6x}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2-6x}{x^2}} = -1 ;$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-6x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x}{\sqrt{x^2-6x}-x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-6x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{6}{x}}+1\right)} = 3,$$

deci la $-\infty$ asimptota este: $y = -x + 3$.

Răspuns corect: e).

8. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -2 = f(0)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1$. Deci, f nu este continuă în punctul $x = 0$.

Răspuns corect: c).

9. Funcția este continuă în punctul $x = 1$ dacă:
$\ln 1 = a + b + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + 1 = 0$.
Funcția devine:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (0,1] \\ ax^2 + (-a-1)x + 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}, \qquad \text{şi}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1) \\ 2ax - a - 1, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Pentru ca f să fie deci derivabilă în $x = 1$ trebuie ca:
$1 = 2a - a - 1 \Leftrightarrow a = 2$. Atunci, $b = -2 - 1 = -3$.

Răspuns corect: c).

10. Trebuie ca: $f(1) = -3$ şi $f'(1) = 0$. Rezultă:

$$1 - a + b = -3, \quad f'(x) = \frac{(2x-a)x - \left(x^2 - ax + b\right)}{x^2},$$

$$f'(1) = (2-a) - (1-a+b) = 1 - b = 0. \text{ Deci, } b = 1, a = 5.$$

Răspuns corect: d).

11. $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$. Tabelul de variație:

x	$-\infty$	-2	-1
$f'(x)$	$-\ -\ -$	$0\ +\ +$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-2)\ \nearrow$	$f(-1)$

Deci, $x = -2$ este punct de minim şi $x = -1$ punct de maxim

Răspuns corect: c).

12. Aplicăm şirul lui Rolle. Dacă $f(x)$ este membrul stâng al ecuației, avem:

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

Şirul lui Rolle:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$3+m$	$-1+m$	$+$

Trebuie ca

$$\begin{cases} 3+m>0 \\ -1+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-3,1).$$

Răspuns corect: e).

ARHITECTURĂ
UNIVERSITATEA „POLITEHNICA" DIN TIMIŞOARA
SESIUNEA: IULIE, DATA 19.07.2010
PROBA 1: MATEMATICĂ

A

1. (7 p) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{ax + a - 2}{x^2 + 1}$, unde a este un parametru real.

Să se determine a astfel încât funcția să aibă punctul extrem $x = -1$.

a) $a = 1$ b) $a = 2$ c) $a = 3$ d) $a = 4$ e) $a = 5$.

2. (10 p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real a pentru care ecuația

$x^3-3x^2+a=0$ are toate rădăcinile reale şi distincte.

a) $(4;\infty)$ b) $(-1;0)$ c) $(-\infty;0)$ d) $(-4;0)$ e) $(0;4)$.

3. (8 p) Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{-2;1\}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+x-2}$. Să se determine asimptotele lui *f*.

a) $x=-2,\ x=1,\ y=2$ b) $x=2,\ x=-1,\ y=1$ c) $x=-2,\ x=1,\ y=1$
d) $x=2,\ x=1,\ y=3$ e) $x=-2,\ x=1,\ y=-2$

4. (10 p) Se consideră funcţia $f:[0,2]\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x\in[0;1] \\ -a\cdot\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-7x+6}, & x\in(1,2]\end{cases}$,

unde $a\in\mathbf{R}$.
Să se găsească valoarea lui *a* pentru care funcţia *f* este continuă pe $[0;2]$.

a) $a=0$ b) $a=1$ c) $a=\dfrac{5}{2}$ d) $a=3$ e) $a=4$.

5. (8 p) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^3.

a) $A^3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ b) $A^3=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ c) $A^3=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$

d) $A^3=\begin{pmatrix}1&9&9\\0&1&9\\0&0&1\end{pmatrix}$ e) $A^3=\begin{pmatrix}1&9&26\\0&1&9\\0&0&1\end{pmatrix}$

6. (8 p) Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R},\quad f(x)=x+\dfrac{4}{x}$. Să se calculeze $f'(1)$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) -3 e) 6.

7. (9 p) Fie $f:(0,\infty)\to \mathbf{R},\ f(x)=\sqrt{x}$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul $x=1$.

a) $y=\frac{1}{2}x$ b) $y=\frac{1}{2}x+1$ c) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
d) $y=x$ e) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

8. (8 p) Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze matricea $X=2A-3B$.

a) $X=\begin{pmatrix}-13 & 6\\ 2 & 9\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ c) $X=\begin{pmatrix}1 & 13\\ 12 & 1\end{pmatrix}$
d) $X=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 2 & 13\end{pmatrix}$ e) $X=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

9. (8 p) Să se rezolve sistemul $\begin{cases}3x+y-z=4\\ x-2y+z=0\\ 2x+y+z=1\end{cases}$.

a) $x=0,\ y=1,\ z=2$ b) $x=1,\ y=2,\ z=3$ c) $x=-1,\ y=-1,\ z=-8$
d) $x=1,\ y=0,\ z=-1$ e) $x=2,\ y=1,\ z=3$.

10. (7 p) Fie $f:(0,+\infty)\to \mathbf{R},\ f(x)=\left[1+\ln(1+x)\right]^{\frac{1}{x}}$. Să se determine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

a) e^2 b) e c) ∞ d) 0 e) $\frac{1}{e}$

11. (9 p) Să se determine valoarea parametrului real *a* pentru care matricea

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ a & 1 & 2\\ a & -2 & -1\end{pmatrix}$$
are rangul 2.

a) $a=5$ b) $a=4$ c) $a=3$ d) $a=2$ e) $a=1$.

12. (8 p) Să se calculeze determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

a) $\Delta=0$ b) $\Delta=5$ c) $\Delta=10$ d) $\Delta=-6$ e) $\Delta=-7$.

2010 – ARHITECTURĂ SOLUȚII

1. Calculăm $f'(x)=\dfrac{-ax^2+(4-2a)x+a}{(x^2+1)^2}$. Trebuie ca $f'(-1)=0$ sau

Echivalent $-\cancel{a}+2a-4+\cancel{a}=0$ $\boxed{a=2}$

Răspuns corect c).

2. Construim Şirul lui Rolle pentru $f(x)=x^3-3x^2+a$

$f'(x)=3x^2-6x=0$ $x_1=0$ $x_2=2$

$-\infty$	0	2	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$f(0)=a$	$f(2)=a-4$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
$-$	$+$	$-$	$+$

Condiția este ca $\begin{cases}f(0)>0\\ f(2)<0\end{cases}$ sau $\begin{cases}a>0\\ a-4<0\end{cases}$ deci $a\in(0,4)$

Răspuns corect: e).

3. Asimptotele verticale sunt rădăcinile polinomului $x^2+x-2=0$

$x_1 = 1, x_2 = -2$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ şi $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$

Asimptota orizontală este $y = 2$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$

Răspuns corect: a).

4. Pentru a fi continuă în punctul $x = 1$ trebuie să avem $l_s = l_d = f(1)$

$l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} e^{x-1} = 1$;

$$l_d = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} -a\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-7x+6} = (-a)\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2x\cos\left(x^2-1\right)}{2x-7} = \frac{2a}{5}$$

$\frac{2a}{5} = 1 \qquad a = \frac{5}{2}$

Răspuns corect: c).

5.
$$A^2 = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Răspuns corect: c).

6. $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$; $\quad f'(1) = 1 - 4 = -3$

Răspuns corect: d).

7. $y - f(1) = f'(1)(x-1)$; $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad f(1) = 1$; $\quad f'(1) = \frac{1}{2}$

$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \qquad y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

Răspuns corect: e).

8. $X = 2\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

Răspuns corect: a).

9. Aplicăm Regula lui Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 13; \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 0; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = -1$$

Răspuns corect: d).

10. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[1 + \ln(1+x)\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x)}{x}} \underline{\underline{l'H}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x}} = e$

Răspuns corect. b).

11. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ Deci rangul este cel puțin 2. Pentru ca rang $(A) = 2$

trebuie ca $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ a & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ sau $-3a + 3 = 0$ sau $a = 1$.

Răspuns corect: e).

12. $\Delta = 4 + 4 + 4 - 4 - 4 - 4 = 0$

Răspuns corect: a).

BIBLIOGRAFIE

[1] Manuale alternative aprobate de Ministerul Educației şi Cercetării pentru clasele a IX-a, a X-a, a XI-a şi a XII-a.

[2] T. Bânzaru, N. Boja, O. Lipovan ş.a., Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat şi admiterea în învățământul superior, Editura Politehnica, Timişoara, 2010.